NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4105 Matematikk 2,
øving 9, vår 2013

Løsningsforslag

Notasjon og merknader

Et generelt råd for alle integrasjonsoppgavene er å skissere integrasjonsområdet hvis man har problemer med å bestemme grensene for de itererte integralene.

Som vanlig er enkelte oppgaver kopiert fra tidligere års løsningsforslag. Derfor kan notasjon, språk og stil variere noe fra oppgave til oppgave.

Oppgaver fra læreboken

13.2.7 Betingelsene for Fubinis teorem er oppfylt, så integralet vi vil beregne er

$$\begin{aligned}\int_1^2 \int_x^{2x} \frac{x}{y} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 x(\ln 2x - \ln x)\,\mathrm{d}x \\ &= \ln 2 \int_1^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln 2}{2}(2^2 - 1) \\ &= \frac{3}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

13.2.24 Området er en halvsirkel med radius 2. Betingelsene for Fubinis teorem er oppfylt, så man får

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} 6x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

13.2.55 Man ønsker å integrere over området der integranden er positiv. Dette blir området innenfor ellipsen $x^2 + 2y^2 = 4$, altså $x^2 + 2y^2 < 4$ (det gjør ingen forskjell om man tar med randen).

13.2.59 Første likhet i oppgaveteksten, altså

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \int_{-b}^{b} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

er simpelthen definisjonen av Riemann-integralet for positive funksjoner på ubegrensede integrasjonsområder. Merk at integranden faktoriserer, så vi har

$$\begin{aligned}\int_{-b}^{b} \int_{-b}^{b} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-b}^{b} \int_{-b}^{b} e^{-x^2} e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \left(\int_{-b}^{b} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-b}^{b} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) \\ &= \left(\int_{-b}^{b} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

Integranden i det siste uttrykket er en symmetrisk funksjon (like funksjon), så

$$\int_{-b}^{b} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Dermed følger det ønskede resultatet,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \lim_{b\to\infty}\left(2\int_0^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &= 4\lim_{b\to\infty}\left(\int_0^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &= 4\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

dersom grensen på andre linje eksisterer (og det gjør den[1]).

13.3.7 Bokens fasit har en skisse av området.

Ligningen $y^2 = 2y - y^2$ viser at de to definerende kurvene skjærer i $(0,0)$ og $(1,1)$. Arealet vi søker er derfor

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{y^2}^{2y-y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 (2y-y^2-y^2)\,\mathrm{d}y\\ &= 2\int_0^1 (y-y^2)\,\mathrm{d}y\\ &= 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

13.3.11 Bokens fasit har en skisse av området.

For å finne arealet, beregner vi integralet:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4}\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4}(\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x\\ &= [\sin x]_{x=0}^{\pi/4} - [-\cos x]_{x=0}^{\pi/4}\\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\\ &= \sqrt{2} - 1.\end{aligned}$$

13.4.5 Området er en sirkel med radius a. Da får man

$$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^a r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \pi a^2.$$

13.4.21 Arealet er gitt ved

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{1+\sin\theta} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = 1 + \frac{3\pi}{8}.$$

13.4.34 At området er vifteformet betyr nettopp at det er på formen

$$0 \le r \le f(\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta$$

[1] Se Matematikk 1.

i polarkoordinater for en kontinuerlig f. Vi vet da at arelaet er

$$A = \int_\alpha^\beta \int_0^{f(\theta)} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left((f(\theta))^2 - 0^2\right) \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\theta))^2 \,\mathrm{d}\theta,$$

som var det vi skulle vise.

13.5.23 For hver x ser det todimensjonale området projisert ned på yz-planet likt ut, og dette vil bli det ytterste integralet. Videre lar man z gå fra 0 til y^2, og y fra -1 til 1. Volumet blir da

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^{y^2} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{-1}^1 y^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2}{3} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

13.5.41 Ved en enkel skisse ser man at man for hver z har samme trekant (tegn området!). Da får man

$$\begin{aligned}\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z &= \int_0^4 \int_0^2 \int_0^{x/2} \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^4 \int_0^2 \frac{x\cos(x^2)}{\sqrt{z}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z = \frac{\sin 4}{2}\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{z}} \,\mathrm{d}z = 2\sin 4.\end{aligned}$$

Eksamensoppgaver

Løsningsforslag til eksamensoppgavene finner en på `http://wiki.math.ntnu.no/tma4105/2012v/gml_eks`. Der er kommet forespørsler som at disse legges ved i selve løsningsforslagene, men dessverre er ofte de gamle LaTeX-filene gått tapt.