Repetisjon
Avsnitt 10.1–10.4

og noe om 10.5

Mat4105, NTNU, våren 2012

Vektorrommet R^3

Det euklidiske rommet (kartesiske koordinater)

$$\mathbb{R}^3 := \{(x, y, z) \colon x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

er et eksempel på et reelt vektorrom V:

$$u + v = v + u \qquad 1u = u$$
$$(u + v) + w = u + (v + w) \qquad a(bu) = (ab)u$$
$$u + 0 = u \qquad a(u + v) = au + av$$
$$u + (-u) = 0 \qquad (a + b)u = au + bu$$
$$u, v, w \in V \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Avstand og lengde

Lengde av vektor v = (x,y,z)

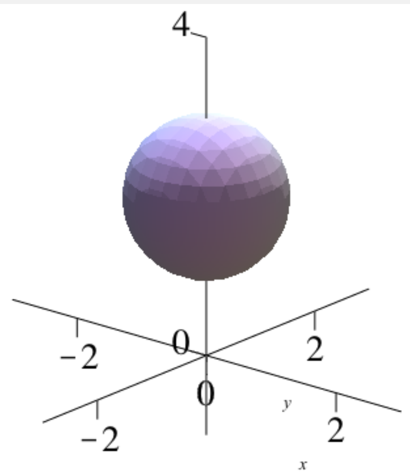
$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Avstandsformel

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Eksempel: enhetssfæren med sentrum i (0,0,2)

$$\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1\}$$



Skalarprodukt

Et skalarprodukt (indreprodukt) er en avbilding

$$V \times V \to \mathbb{R} \qquad (u, v) \mapsto u \cdot v$$

slik at

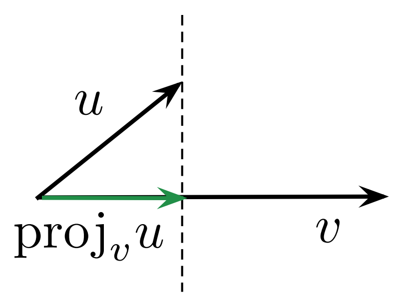
$$\begin{aligned} u \cdot v &= v \cdot u \\ (\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v) &= \lambda(u \cdot v), \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ u \cdot (v + w) &= u \cdot v + u \cdot w \\ u \cdot u &\geq 0 \text{ med likhet kun for } u = 0 \end{aligned}$$

Spesielt: $u \cdot v \stackrel{\text{def.}}{=} u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ er et skalarprodukt.

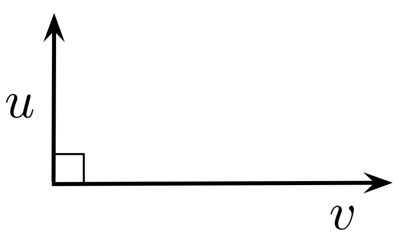
Det euklidiske skalarproduktet

For skalarproduktet $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ gjelder:

$$u \cdot u = |u|^2$$



$$\mathrm{proj}_v u \overset{\text{def.}}{=} \frac{(u \cdot v)}{|v|^2} v, \qquad v \neq 0$$



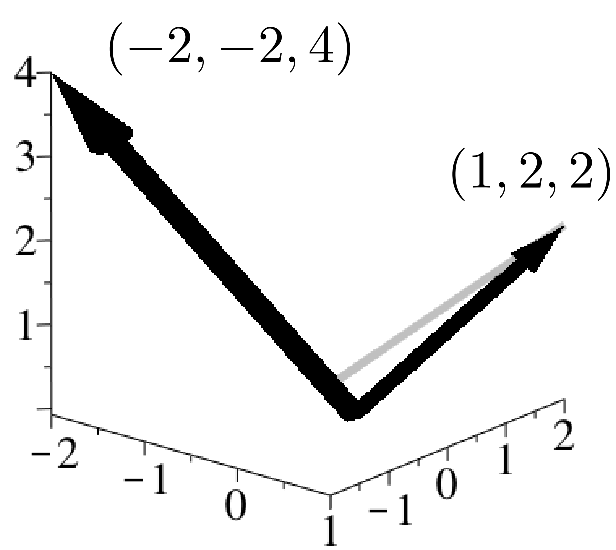
$$u \cdot v = 0 \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{"}u \text{ er ortogonal med } v\text{"}$$

Eksempel: $u = (1,2,2)$, $v = (-2,-2,4)$

$$u \cdot v = 1(-2) + 2(-2) + 2(4) = 2$$

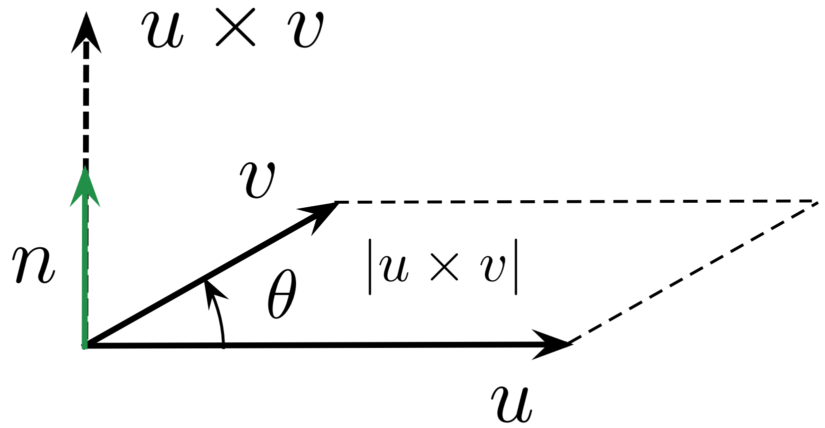
$$|v|^2 = (-2)^2 + (-2)^2 + 4^2 = 24$$

$$\mathrm{proj}_v u = \tfrac{2}{24}(-2,-2,4) = \tfrac{1}{6}(-1,-1,2)$$



Kryssproduktet

For kryssproduktet $u \times v \overset{\text{def.}}{=} (|u||v|\sin(\theta))n$ *gjelder:*



$$(ru) \times (sv) = (rs)(u \times v)$$
$$u \times (v + w) = u \times v + u \times w$$
$$(u + v) \times w = u \times w + v \times w$$
$$u \times v = -(v \times u)$$
$$0 \times u = 0$$

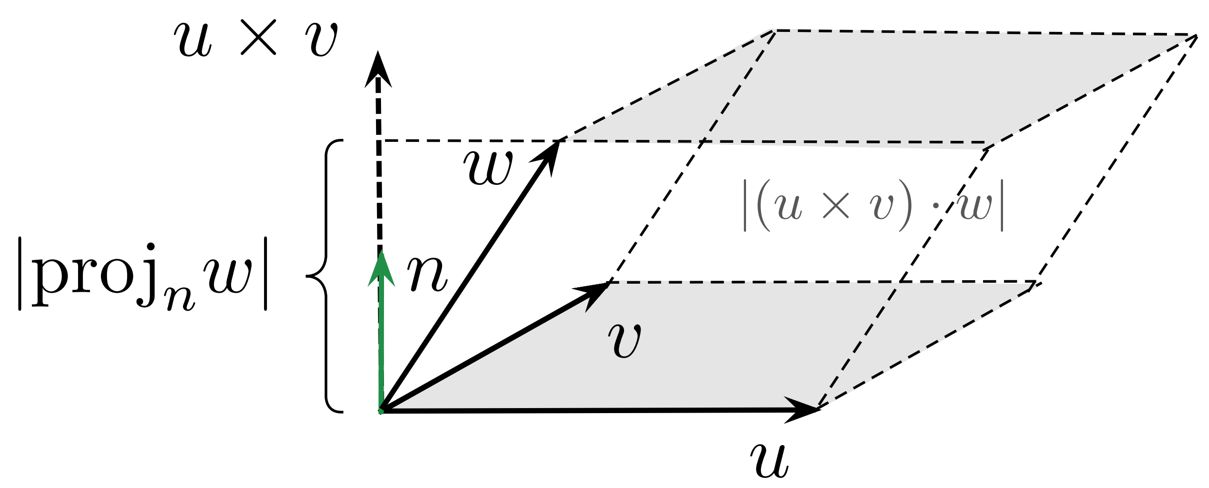
Spesielt er:

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$
$$= (u_2v_3 - u_3v_2)e_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)e_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)e_3$$
$$= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Det skalare trippelproduktet

Ettersom

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$



$$= (u_2v_3 - u_3v_2)e_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)e_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)e_3$$

er

$$(u \times v) \cdot w$$

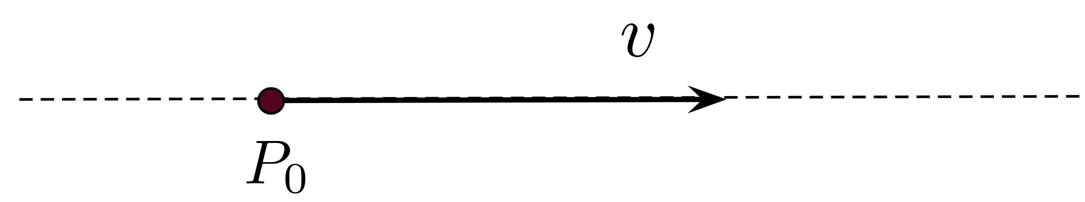
$$= (u_2v_3 - u_3v_2)w_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)w_3$$

$$= \det \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Linje: ligning og avstand

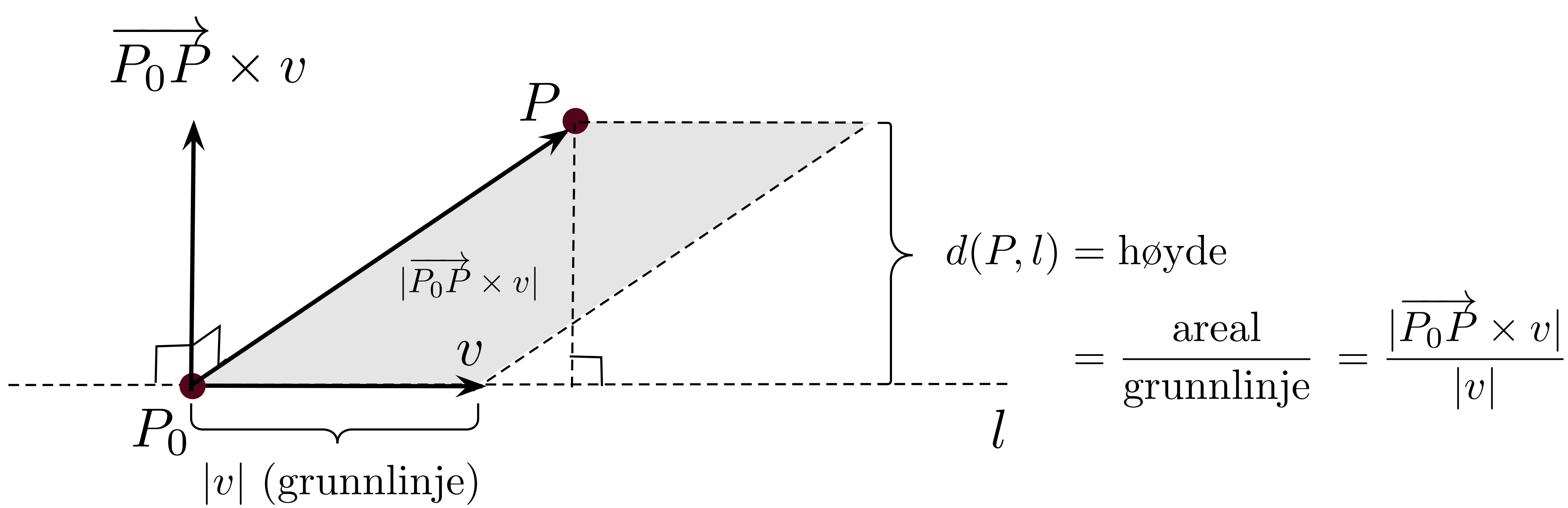
Linje gjennom punktet P_0 parallell med vektoren v

$$\boxed{l = \{P_0 + tv\colon t \in \mathbb{R}\}}$$



Avstand mellom et punkt P og en linje $l = P_0 + tv$

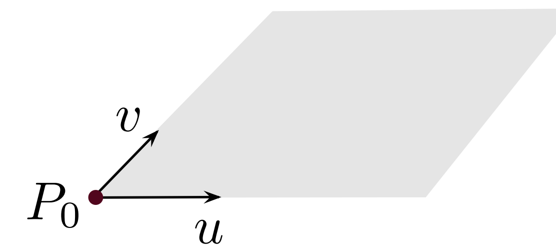
$$\boxed{d(P_0, l) = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \times v|}{|v|}}$$



Plan: ligninger og avstand

Plan gjennom punktet P_0 generert av vektorene u, v

$$P = \{P_0 + su + tv \colon s, t \in \mathbb{R}\}$$

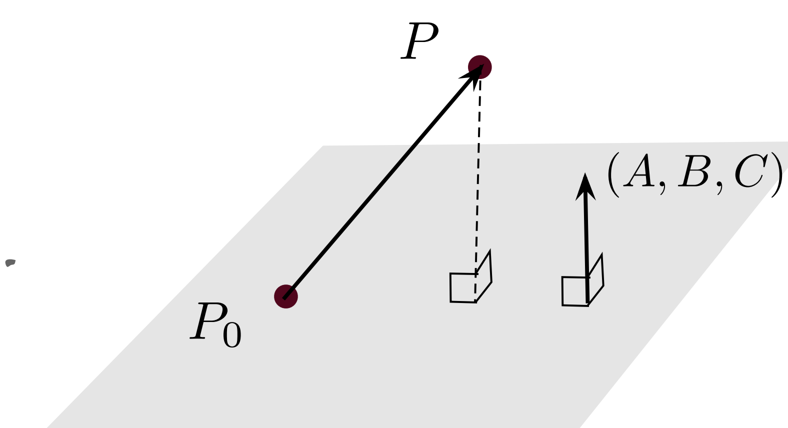


Plan gjennom punktet (x_0, y_0, z_0) ortogonalt mot vektoren (A, B, C)

$$P = \{(x, y, z) \colon \underbrace{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}_{Ax+By+Cz=D}\}$$

Avstand mellom et punkt P og et plan
$Ax+By+Cz=D$ gjennom punktet $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

$$d(l, \{Ax + By + Cz = D\}) = \left|\overrightarrow{P_0P} \cdot \frac{(A, B, C)}{|(A, B, C)|}\right|$$



$d = |\text{proj}_{(A,B,C)}\overrightarrow{P_0P}|$