Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:

Trond Digernes	73 59 35 17
Berner Larsen	73 59 35 25
Lisa Lorentzen	73 59 35 48
Vigdis Petersen	73 59 16 50

Vedlegg: Formelliste

EKSAMEN I FAG SIF5005 MATEMATIKK 2

Bokmål
Fredag 12. mai 2000
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
- Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Sensuren faller i uke 25.

Oppgave 1 skal besvares uten begrunnelse. På de andre oppgavene må det være med så mye tekst og mellomregning at resonnementet kommer tydelig frem. Rene kalkulatorsvar godtas ikke.

Oppgave 1 La T være legemet i første oktant begrenset av koordinatplanene $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ og planet

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1\,.$$

Hvilke(t) av integralene nedenfor gir volumet av T ?

$$(i)\quad \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2z}{3}} \int_0^{2-y-\frac{2z}{3}} dx\,dy\,dz \qquad (ii)\quad \int_0^3 \int_0^{2-x} \int_0^{\frac{3}{2}(2-x-y)} dz\,dx\,dy$$

$$(iii)\quad \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{\frac{3}{2}(2-x-y)} dz\,dy\,dx \qquad (iv)\quad \int_0^2 \int_0^{2-x} \frac{3}{2}(2-x-y)dy\,dx$$

Oppgave 2 Finn og klassifiser de kritiske punktene til funksjonen

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + \frac{1}{2}y^2\,.$$

Oppgave 3 Et plant legeme R i første kvadrant er avgrenset av hyperblene

$$x^2 - y^2 = 1, \qquad x^2 - y^2 = 2, \qquad xy = \frac{1}{2} \qquad \text{og} \qquad xy = 1\,.$$

Innfør nye variable $u = x^2 - y^2$ og $v = xy$, og bruk dette til å finne massen

$$m = \iint_R \delta \, dA$$

til R når massetettheten δ er proporsjonal med kvadratet av avstanden til origo (proporsjonalitetsfaktor k).

Oppgave 4 I et punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ på flaten $z = x^2 - y^2$ er tangentplanet parallelt med planet $z = 4x - 2y$. Finn P_0 og ligningen for dette tangentplanet.

Oppgave 5 La R være det plane området i første kvadrant som er begrenset av x-aksen, y-aksen og kurven

$$2x^{3/2} + y^3 + 5xy = 1\,,$$

randen inkludert. Finn største og minste verdi av funksjonen $f(x, y) = xy$ over området R.

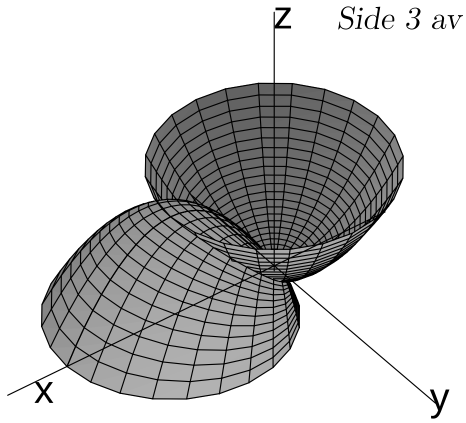
Oppgave 6 Kurven C er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\cos t\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\cos t\,\mathbf{j} + 2\sin t\,\mathbf{k} \qquad \text{for } 0 \le t \le 2\pi.$$

a) Bestem følgende størrelser i et vilkårlig punkt på kurven C:

- enhetstangentvektoren $\mathbf{T}$
- krumningen κ

b) Vis at C er skjæringskurven mellom en kuleflate og et plan. Bestem sentrum og radius i sirkelen C.



Oppgave 7

I denne oppgaven kan du få bruk for at

$$\int \cos^4\theta\, d\theta = \frac{3\theta}{8} + \frac{3}{8}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{4}\cos^3\theta\sin\theta + C\,.$$

La T være legemet begrenset av paraboloidene

$$z = x^2 + y^2 \qquad \text{og} \qquad z = 1 - (x-1)^2 - y^2\,.$$

a) Vis at projeksjonen av T i xy-planet er en sirkelskive, og finn volumet av T.

b) La S_1 være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 1-(x-1)^2-y^2$, og la S_2 være den delen som ligger på paraboloiden $z = x^2+y^2$. Både S_1 og S_2 er orientert slik at enhetsnormalen $\mathbf{n}$ har positiv z-komponent. La videre vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved

$$\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}\,.$$

Finn fluksen til $\mathbf{F}$ gjennom flatene S_1 og S_2, det vil si, beregn flateintegralene

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS \qquad \text{og} \qquad \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS\,.$$

c) Vektorfeltet $\mathbf{G}$ er gitt ved

$$\mathbf{G} = e^{\sin z}\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - y\,\mathbf{k}\,.$$

Beregn kurveintegralet (linjeintegralet)

$$\oint_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} \qquad \left(= \oint_C \mathbf{G}\cdot\mathbf{T}\,ds\right)$$

der C er skjæringskurven mellom de to paraboloidene, orientert mot urviseren sett ovenfra.
Hint: Kurven C ligger i et plan.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Lisa Lorentzen 73 59 35 48

Vedlegg: Formelliste

EKSAMEN I FAG SIF5005/07 MATEMATIKK 2/2A

Bokmål
Tirsdag 1. august 2000
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
- Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Sensurfrist: 1. september 2000.

Oppgave 1 skal besvares uten begrunnelse. På de andre oppgavene må det være med så mye tekst og mellomregning at resonnementet kommer tydelig frem. Rene kalkulatorsvar godtas ikke.

Oppgave 1 Gitt vektorfeltet $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
For hvert av alternativene (i)–(iii) nedenfor angi med 'ja' eller 'nei' om det er lik fluksen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

til $\mathbf{F}$ ut gjennom kuleflaten S med senter i origo og radius $a > 0$:

$$(i) \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} 3r^2 \cos\theta \, dz\, dr\, d\theta \qquad (ii) \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 3\rho^3 \sin^2\varphi\, \cos\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\rho$$

$$iii) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a 3\rho^2 \sin\varphi\, \cos\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

Oppgave 2 Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y) = (e^y + ye^x + 2x)\mathbf{i} + (xe^y + e^x + 1)\mathbf{j}\,.$$

a) Vis at $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt.
Bestem en potensialfunksjon for $\mathbf{F}$, det vil si, bestem en funksjon $f(x,y)$ slik at $\nabla f = \mathbf{F}$.

b) Beregn arbeidet

$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds \quad \left(= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\right)$$

som $\mathbf{F}$ utfører ved å bevege en partikkel fra punktet $(0,1)$ til punktet $(0,e^{4\pi})$ langs kurven

$$C: \quad \mathbf{r}(t) = e^t \sin t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j}\,, \quad 0 \le t \le 4\pi.$$

c) Samme spørsmål som i **b)**, men med vektorfeltet $\mathbf{F}$ erstattet med

$$\mathbf{G}(x,y) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}\,.$$

Oppgave 3 En flate $z = f(x,y)$ i rommet har tangentplan

$$z = 2x - 3y + 5$$

i punktet $(1,1,4)$. Finn den retningsderiverte til f i punktet $(1,1)$ i retningen $\mathbf{i}+\mathbf{j}$.
La L være skjæringslinjen mellom tangentplanet i $(1,1,4)$ og planet $y = x$. Finn vinkelen som L danner med xy-planet.

Oppgave 4 Finn de høyeste og laveste punktene (det vil si, de med størst og minst z-koordinat) på skjæringskurven mellom flatene

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad \text{og} \qquad \ln(1-xy) - \frac{1}{2}(x^2+y^2) - z = 0\,.$$

Oppgave 5 La R være området i xy-planet begrenset av kurven $y = e^x$ og de rette linjene $x = 1$, $x = 2$ og $y = 1$. Beregn dobbeltintegralet

$$\iint_R |x-y|\,dA\,.$$

Oppgave 6 La C være sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, orientert mot urviseren. La videre

$$f(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{og} \quad g(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}\,.$$

Vis at

$$\oint_C f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = 2\pi$$

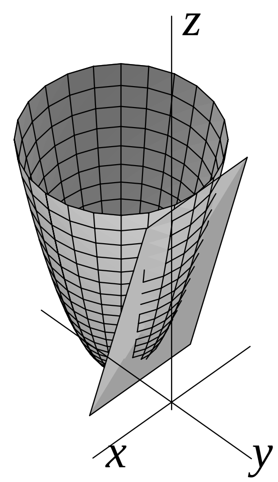
ved å regne ut linjeintegralet direkte.
La R være området begrenset av sirkelen C . Forklar hva som er galt med følgende resonnement, og hvorfor:

"Ved Greens teorem har vi

$$\oint_C f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\,dA = 0\,."$$

Oppgave 7 Legemet T er avgrenset av flatene

$$S_1: \quad z = 4y + 5 \qquad \text{og} \qquad S_2: \quad z = x^2 + (y + 2)^2.$$



a) Finn y-koordinaten til sentroiden (tyngdepunktet) til T når T har massetetthet $\delta(x, y, z) = 1$.

b) La C være skjæringskurven mellom S_1 og S_2, orientert mot urviseren sett ovenfra. Beregn linjeintegralet

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds \quad \left(= \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\right)$$

der

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y\,\mathbf{i} + y^2 z^3\,\mathbf{j} + (x + y^6)\,\mathbf{k}\,.$$

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Vedlegg: Formelliste

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen 7359 3525
Lisa Lorentzen 7359 3548
Vigdis Petersen 7359 3523

EKSAMEN I FAG SIF5005 MATEMATIKK 2

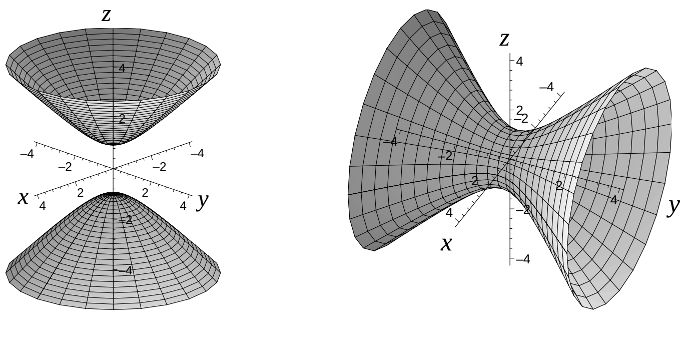
Bokmål
Mandag 14. mai 2001
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: B2 – Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
– Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Sensuren faller i uke 25.

Oppgave 1 skal besvares uten begrunnelse. Alle andre svar skal begrunnes, og det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgode svar.

Oppgave 1



A B

Hvilken av de 6 ligningene nedenfor har graf som vist i figur A?
Hvilken av de 6 ligningene nedenfor har graf som vist i figur B?

(i)	$x^2 + y^2 - z^2 = 1$	*(iv)*	$x^2 - y^2 - z^2 = 1$
(ii)	$x^2 - y^2 + z^2 = 1$	*(v)*	$-x^2 + y^2 - z^2 = 1$
(iii)	$-x^2 + y^2 + z^2 = 1$	*(vi)*	$-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

Oppgave 2 Bruk Lagranges metode til å finne største mulige verdi for funksjonen $f(x,y,z) = xyz$ når (x,y,z) skal ligge på ellipsoiden

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Her er a, b og c gitte positive konstanter.

Oppgave 3 Et fly reiser gjennom øvre luftlag der temperaturen i (x,y,z) er $T(x,y,z)$. Finn temperaturendringen per minutt rundt flyet ved et tidspunkt der

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -4 \qquad \text{målt i °C/km},$$

når flyets fart er 1000 km/h og det flyr i retningen $\langle 7,5,1 \rangle$.

Oppgave 4 Finn en normalvektor til flaten

$$S\colon \quad xz^2 - yz + \cos xy = 1$$

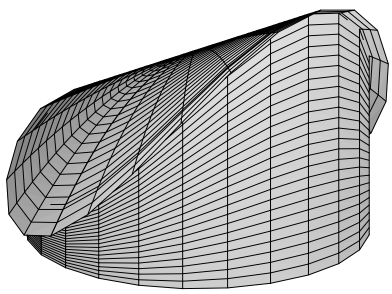
i punktet $(0,0,1)$. Vis at tangenten til kurven

$$x = \ln t, \quad y = t \ln t, \quad z = t \qquad \text{for } 0 < t < \infty$$

i punktet $(0,0,1)$ ligger i tangentplanet til S i punktet $(0,0,1)$.

Oppgave 5 En planlagt kirke har form som en sirkulær sylinder $x^2 + y^2 = 18^2$ som står på xy–planet med tak

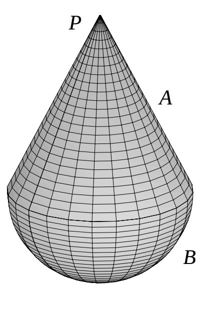
$$z = 20 - \frac{x^2}{25} + \frac{y}{2} \qquad \text{for } x^2 + y^2 \le 400.$$



a) Beregn kirkerommets volum V.

b) Valg av takbelegg er avhengig av hvor bratt taket er. Kan det brukes et belegg som tåler en helning på maksimalt 60° med horisontalplanet?

Oppgave 6 Et legeme T er satt sammen av to kompakte deler A og B. Del A er en rett sirkulær kjegle med høyde 4, grunnflateradius 2 og massetetthet $1/3$. Del B er en halvkule med radius 2 og massetetthet $4/3$. Delene er festet sammen som vist på figuren. La P betegne toppunktet i spissen av A. Finn avstanden mellom P og tyngdepunktet til T.



Oppgave 7 La vektorfeltet

$$\mathbf{F} = (2x + \cos yz)\mathbf{i} - \arctan y\,\mathbf{j} + \left(1 + \frac{z}{1+y^2}\right)\mathbf{k}$$

være gitt.

a) Beregn $\operatorname{div} \mathbf{F}$.

b) Bestem fluksen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

opp gjennom den delen S av flaten $z = e^{1-x^2-y^2} - 1$ der $z \geq 0$.

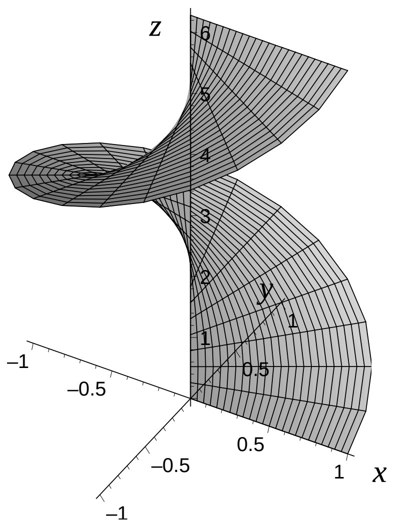
Oppgave 8 La vektorfeltet

$$\mathbf{G} = z\mathbf{i} + x^4 y\,\mathbf{j} + (1 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$$

være gitt, og la S være den delen av skrueflaten gitt i sylinderkoordinater ved $z = \theta$ der $0 \leq r \leq 1$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$, og vist på figuren nedenfor. Bruk Stokes' teorem til å beregne

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S$$

der normalvektoren $\mathbf{n}$ på S peker oppover.



Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Vedlegg: Formelliste

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Krogstad 7359 3536
Dag Olav Kjellemo 7359 3549

EKSAMEN I FAG SIF5005 MATEMATIKK 2

Bokmål
Onsdag 8. august 2001
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: B2 – Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
– Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Sensuren faller 1. september.

Alle svar skal begrunnes, og det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgode svar.

Oppgave 1 Funksjonen f er definert ved

$$f(x, y) = x^3y + xy^2 + 40y.$$

a) Finn og klassifiser de kritiske punktene til f.

b) Finn største og minste verdi for $f(x, y)$ på området gitt ved

$$x^2 \leq y \leq x.$$

Er disse verdiene også maksimum og minimum for $f(x, y)$ i hele planet?

Oppgave 2 En flate S er gitt ved

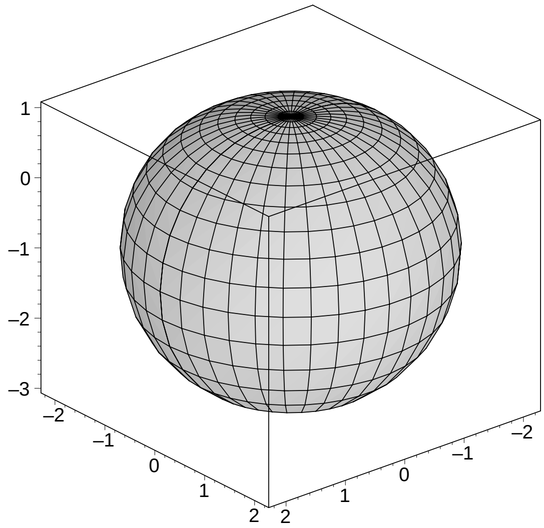
$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 16.$$

La T være tangentplanet til S i et punkt (a, b, c) på S. Finn ligningen for T.

Punktene (a, b, c) på S som er slik at punktet $(0, 0, 4)$ ligger på T, danner en kurve. Hvilken kurve?

Oppgave 3 Finn volumet til legemet avgrenset av flaten gitt i kulekoordinater ved

$$\rho = 2 - \cos\varphi.$$



Oppgave 4 Beregn trippelintegralet

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{z-4}\, dy\, dz\, dx$$

ved å bytte om integrasjonsrekkefølgen for x og z.

Oppgave 5 Undersøk om funksjonen definert ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - x^2y^2}{x^4 + y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

er kontinuerlig i origo. Undersøk videre om de partiellderiverte $f_x(0,0)$ og $f_y(0,0)$ eksisterer.

Oppgave 6 Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3 z\,\mathbf{i} + y^3 z\,\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\,\mathbf{k}.$$

La legemet T være halvkulen gitt ved

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq 0.$$

La S være overflaten til T, og la $\mathbf{n}$ være utadrettet enhetsnormal til S.

a) Finn $\operatorname{div}\mathbf{F}$, og bestem $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$.

b) La S_1 være den krumme delen av S, og bestem $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$.

Oppgave 7 Bestem de deriverbare funksjonene f og g slik at vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z \cos x\,\mathbf{i} + zg(y)\,\mathbf{j} + \big(f(x) + y^2\big)\,\mathbf{k}$$

er konservativt og

$$\int_{(0,0,0)}^{(0,0,2)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = 6.$$

Oppgave 8 La

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} - (xz + 3x^2)\,\mathbf{j},$$

la S være den delen av paraboloiden $x^2 + 2x + y^2 + z = 3$ som ligger over planet $2x + z = 2$, og la C være skjæringskurven mellom planet og paraboloiden. Kontroller at Stokes' teorem holder for $\mathbf{F}$ og S ved å beregne begge integralene

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds \quad \text{og} \quad \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,dS$$

der $\mathbf{T}$ og $\mathbf{n}$ er riktig valgt.