Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Lisa Lorentzen tlf. 73 59 35 48
Bjørn Dundas tlf. 73 55 02 42
Trond Digernes tlf. 73 59 35 17
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68

EKSAMEN I FAG SIF5005 MATEMATIKK 2

Torsdag 14. mai 1998
Tid: 0900–1400

Hjelpemidler: Typegodkjent kalkulator med tomt minne,
Rottmann: *Matematisk formelsamling.*

Oppgave 1

a) La K være romkurven gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t,\ \sqrt{2}\,e^{-t}\right\rangle, \qquad 0 \le t < \infty.$$

Vis at K ligger på en kjegleflate. Skisser K og bestem buelengden.

b) Bestem tangentlinjen til K i punktet med posisjonsvektor $\mathbf{r}(t_0)$. Skisser den kurven skjæringspunktet mellom tangentlinjen og xy-planet beskriver når t_0 varierer.

Oppgave 2

a) Finn, og klassifiser, de kritiske punktene for funksjonen

$$f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3.$$

b) Bestem den største og den minste verdien som funksjonen $f(x,y)$ oppnår på det trekantete området

$$R = \{\,(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2x\,\}.$$

Oppgave 3
La $z = f(x, y)$ være en flate i rommet med tangentplan

$$x + z = 4$$

i punktet $(3, 0, 1)$. Finn den retningsderiverte til $f(x, y)$ i punktet $(3, 0)$ i retningen $\mathbf{j}$. Bestem også en enhetsvektor $\mathbf{u}$ slik at den retningsderiverte til $f(x, y)$ i punktet $(3, 0)$, i retningen $\mathbf{u}$, er lik $1/2$.

Oppgave 4
Legemet T er begrenset av flatene $z = x^2+y^2$ og $z = 2-\sqrt{x^2 + y^2}$, og har konstant massetetthet lik $1/2$.

a) Skisser T, og vis at massen til T er $5\pi/12$. Finn massesenteret (sentroiden).

b) Anta nå at T flyter i et vannbad, og anta at vann har massetetthet 1. Etter Arkimedes' lov er massen av den vannmengden T fortrenger lik massen av T. Legemet T vil flyte med symmetriaksen (z-aksen i **a)**) vertikalt og den butte enden ned. Hvor dypt flyter T i vannet?

c) La S være den delen av Ts overflate som har ligning $z = x^2 + y^2$. Finn

$$\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS \qquad \text{der } \mathbf{F}(x, y, z) = \left\langle x^2ye^z,\ -xy^2e^z,\ e^{xyz} \right\rangle,$$

og $\mathbf{n}$ er enhetsnormalen til S som peker ut av T.

Oppgave 5

a) La $\mathbf{F}$ være et vektorfelt med kontinuerlige partiellderiverte, definert i hele rommet. La S og S' være to orienterte, stykkevis glatte flater med felles positivt orientert randkurve C, der C er en orientert, enkel, lukket og stykkevis glatt kurve i rommet.

Gjør rede for at hvis $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ så er

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

(Du kan anta at flatene S og S' bare skjærer hverandre langs randkurven C.)

b) I en elv spennes opp et nett som har form som en flate S med ligning

$$y = (1 - x^2)(1 - z^2) \qquad \text{for } -1 \le x \le 1,\ -1 \le z \le 1.$$

Vannstrømmen er gitt ved hastighetsfeltet

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \left\langle \cos^2 x \sin z \cos z,\ \left(\frac{\pi^2}{4} - x^2\right)\left(\frac{\pi}{2} + z\right),\ -\sin x \cos x \cos^2 z \right\rangle.$$

Hvor mange volumenheter vann renner gjennom nettet pr. tidsenhet (dvs. hvor stor er fluksen til vektorfeltet $\mathbf{v}$ gjennom S i retning av enhetsnormalen med positiv $\mathbf{j}$-komponent)?