SIF5005 Matematikk 2 1998–05–14

Kortfattet løsningsforslag

Oppgave 1

a) C ligger på kjegleflaten $z^2 = 2(x^2 + y^2)$. Buelengden er $\int_0^\infty |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_0^\infty 2e^{-t}\,dt = \underline{2}$.

b) Tangenten har parameterfremstilling $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z_0 + ct$, $-\infty < t < \infty$:
$x = e^{-t_0}\big(\cos t_0 - t(\sin t_0 + \cos t_0)\big)$, $y = e^{-t_0}\big(\sin t_0 - t(\sin t_0 - \cos t_0)\big)$, $z = e^{-t_0}\sqrt{2}\,(1 - t)$.

Skjæring med xy-planet når $t = 1$, da er $\underline{x = -e^{-t_0}\sin t_0,\ y = e^{-t_0}\cos t_0}$. Når t_0 varierer vil skjæringspunktet (x, y) beskrive en spiral.

Oppgave 2

a) Sadelpunkt i $(0, 0)$, lokalt maksimum i $(1, 1)$.

b) Minste verdi $f(2, 4) = \underline{-48}$, største verdi $f(1, 1) = \underline{1}$. (Mulige ekstremalverdier på randkurven: $f(0, 0) = 0$, $f(2, 0) = -8$, $f(2, \sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 8$, $f(2, 4) = -48$, $f(4/9, 8/9) = 32/81$.)

Oppgave 3

Ved figurbetraktning: $D_{\mathbf{j}} f(3, 0) = \underline{0}$ og $\nabla f(3, 0) = -\mathbf{i}$ (størst stigning i denne retningen).

Kan også finne $f_x(3, 0)$ og $f_y(3, 0)$ ved å sammenligne $x + z = 4$ med den generelle ligningen $z - 1 = f_x(3, 0)(x - 3) + f_y(3, 0)(y - 0)$ for tangentplanet. Det gir $f_x(3, 0) = -1$, $f_y(3, 0) = 0$ og $\nabla f(3, 0) = \langle -1, 0\rangle$. $D_{\mathbf{j}} f(3, 0) = \langle -1, 0\rangle \cdot \langle 0, 1\rangle = \underline{0}$.

La $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$, $a^2 + b^2 = 1$. $D_{\mathbf{u}} f(3, 0) = \langle -1, 0\rangle \cdot \langle a, b\rangle = 1/2$ når $a = -1/2$, $\mathbf{u} = \underline{\langle -1/2, \pm\sqrt{3}/2\rangle}$.

Oppgave 4

a) Masse $m = \iiint_T (1/2)\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{2-r} (1/2)\,r\,dz\,dr\,d\theta = \underline{5\pi/12}$. Massesenter $\bar{x} = \bar{y} = \underline{0}$ ved symmetri, $\bar{z} = (1/m)\iiint_T z(1/2)\,dV = (1/m)\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{2-r} z(1/2)\,r\,dz\,dr\,d\theta = \underline{9/10}$.

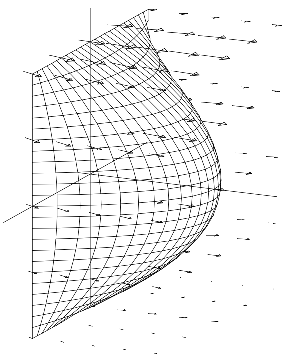
b) La vannlinjen være i høyden $z = h\ (h \le 1)$, der er $r = \sqrt{h}$. Bruker Arkimedes' lov:
$5\pi/12 = m_{\text{vann}} = \iiint_{T_{\text{undervann}}} dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{h}}\int_{r^2}^{h} r\,dz\,dr\,d\theta = \pi h^2/2$, $\ h = \underline{\sqrt{5/6}} \approx 0{,}91$.

c) Bruker Stokes' teorem. Randkurven C til S er sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ i planet $z = 1$.
$\iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \int_{2\pi}^{0} -2e\cos^2 t \sin^2 t\,dt = \underline{e\pi/2}$.

Eller, ved å bruke at sirkeldisken R: $x^2 + y^2 \le 1$ i planet $z = 1$ også har randkurve C:
$\iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \iint_R (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \cdot (-\mathbf{k})\,dx\,dy = \iint_R e(x^2 + y^2)\,dx\,dy = \underline{e\pi/2}$.

Oppgave 5

a) La T være legemet begrenset av (dvs. med overflate) S og S'. Ytre enhetsnormal er $\mathbf{n}$ på den ene delen og $-\mathbf{n}$ på den andre. Bruker vi $\mathbf{n}$ på S og $-\mathbf{n}$ på S', gir divergensteoremet:



$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS + \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n})\,dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV = 0,$$

følgelig er $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS = -\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n})\,dS = \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$.

b) Kan bruke resultatet i **a)** siden $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Den gitte flate S og kvadratet S' : $-1 \le x \le 1$, $-1 \le z \le 1$ i xz-planet har samme randkurve.

$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\,dS = \iint_{S'} \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}\,dS =$
$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (\pi^2/4 - x^2)(\pi/2 + z)\,dx\,dz = \underline{(\pi^2/2 - 2/3)\pi} \approx 13{,}4$.