Løsningsforslag

1 Alternativene (i), (iii) og (iv) er riktige.

2 Kritiske punkter:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \Rightarrow y = x^2 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + y = 0 \Rightarrow y = 3x\,.$$

Dette gir $x^2 = 3x$, som har løsninger $x = 0$ og $x = 3$.
$x = 0$ gir $y = 0$, og $x = 3$ gir $y = 9$. Så de kritiske punktene er $\boxed{(0,0) \text{ og } (3,9)}$.
Klassifisering:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3 \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1 \quad \Delta = AC - B^2 = 6x - 9$$

$$\Delta(0,0) = -9 < 0 : \boxed{(0,0) \text{ er et sadelpunkt.}}$$

$$\Delta(3,9) = 9 > 0 \quad \text{og} \quad A(3,9) = 18 > 0 : \boxed{(3,9) \text{ er et lokalt minimumspunkt.}}$$

3 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2(x^2+y^2)$, så $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$.
Sammen med $\delta = k(x^2+y^2)$ gir dette:

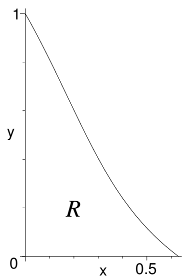
$$m = \iint_R \delta\, dA = \iint_R k(x^2+y^2)\, dA = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_1^2 k(x^2+y^2) \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, du\, dv$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_1^2 k(x^2+y^2) \frac{1}{2(x^2+y^2)}\, du\, dv = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_1^2 \frac{k}{2}\, du\, dv = \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{k}{4}}.$$

4 En normalvektor til planet $z = 4x - 2y$, eller $-4x + 2y + z = 0$: $\langle -4, 2, 1\rangle$.
En normalvektor til flaten $z = x^2 - y^2$ i $P_0(x_0, y_0, z_0)$: $\langle -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\rangle\big|_{P_0} = \langle -2x_0, 2y_0, 1\rangle$.
Disse er parallelle hvis og bare hvis $-2x_0 = -4$, dvs. $x_0 = 2$, og $2y_0 = 2$, dvs. $y_0 = 1$. Dette gir $z_0 = 3$, så $\boxed{P_0 = (2,1,3)}$. Tangentplanet gjennom P_0:

$$-4 \cdot (x-2) + 2 \cdot (y-1) + 1 \cdot (z-3) = 0\,, \quad \text{dvs.} \quad \boxed{4x - 2y - z = 3}.$$

5 Kurven $2x^{3/2} + y^3 + 5xy = 1$ skjærer koordinataksene i $(0,1)$ og $((\frac{1}{2})^{2/3}, 0)$ (og ingen andre steder), så vi får et område som vist på figuren.
Funksjonen $f(x,y) = xy$ har ett kritisk punkt, i origo, så ingen kritiske punkter ligger i det indre av området. Maksimum og minimum oppnås derfor på randen. Siden $f(x,y) \geq 0$ i 1. kvadrant og $f(x,y) = 0$ langs aksene, er $\boxed{f_{\min} = 0}$ i R.
Maksimum må etter dette oppnås langs kurven $2x^{3/2} + y^3 + 5xy = 1$.
Lagranges metode, med $g(x,y) = 2x^{3/2} + y^3 + 5xy$, gir:



$$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda(3x^{1/2} + 5y) \\ x = \lambda(3y^2 + 5x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = \lambda(3x^{3/2} + 5xy) \\ xy = \lambda(3y^3 + 5xy) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{3/2} = y^3 \Rightarrow x = y^2\,.$$

Innsatt i $2x^{3/2} + y^3 + 5xy = 1$ gir dette $8y^3 = 1$, dvs. $y = 1/2$ og $x = y^2 = 1/4$.
Så $\boxed{f_{\max} = f(1/4, 1/2) = 1/8}$.

6 **a)**

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= \langle \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\cos t, 2\sin t\rangle \\
\mathbf{r}'(t) &= \langle -\sqrt{2}\sin t, -\sqrt{2}\sin t, 2\cos t\rangle \\
|\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{2\sin^2 t + 2\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2 \\
\boxed{\mathbf{T}} &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{2} = \boxed{\langle -\tfrac{\sin t}{\sqrt{2}}, -\tfrac{\sin t}{\sqrt{2}}, \cos t\rangle} \\
\mathbf{r}''(t) &= \langle -\sqrt{2}\cos t, -\sqrt{2}\cos t, -2\sin t\rangle \\
\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sqrt{2}\sin t & -\sqrt{2}\sin t & 2\cos t \\ -\sqrt{2}\cos t & -\sqrt{2}\cos t & -2\sin t \end{vmatrix} = \langle 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 0\rangle \\
|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| &= \sqrt{8+8} = 4 \\
\boxed{\kappa} &= \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{4}{8} = \boxed{\tfrac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

b) Hvis vi skriver $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$, har vi $x(t) = y(t) = \sqrt{2}\cos t$, så kurven ligger i planet $x = y$. Videre har vi $x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 2\cos^2 t + 2\cos^2 t + 4\sin^2 t = 4$, så kurven ligger også på kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. (C er dessuten en lukket kurve, så den utgjør hele skjæringskurven mellom disse to flatene.) Siden planet $x = y$ går gjennom kulens sentrum (origo), er C en storsirkel på kuleflaten. Det følger at sirkelen C har $\boxed{\text{sentrum i origo og radius lik 2}}$.

7 **a)** Skjæring mellom flatene: $x^2 + y^2 = 1 - (x-1)^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - x = 0 \Rightarrow (x - 1/2)^2 + y^2 = (1/2)^2$. Så projeksjonen av legemet blir sirkelskiven med sentrum i $(1/2, 0)$ og radius lik $1/2$. Av ligningen $x^2 + y^2 - x = 0$ ser vi at sirkelen $(x - 1/2)^2 + y^2 = (1/2)^2$ har ligning $r = \cos\theta$ i polarkoordinater $(-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2)$.
Hvis vi lar D betegne sirkelskiven, har vi for volumet:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(T) &= \iint_D (1 - (x-1)^2 - y^2 - (x^2 + y^2))\,dA = \iint_D 2(x - x^2 - y^2)\,dA \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} (r\cos\theta - r^2) r\,dr\,d\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\frac{1}{3}r^3\cos\theta - \frac{1}{4}r^4]_0^{\cos\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{6}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta = \boxed{\tfrac{\pi}{16}}
\end{aligned}$$

b) Vi merker oss at $\mathrm{div}\mathbf{F} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z} = 0$, og at $\mathbf{n}$ peker ut av legemet på S_2 og inn i legemet på S_1. Divergensteoremet gir:

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS - \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \mathrm{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_T 0\,dV = 0$$

$$\text{dvs.} \quad \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS\,,$$

så det er nok å regne ut den ene fluksen. Vi tar for eksempel $\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$.
S_2 kan parametriseres ved $\mathbf{r}(x,y) = \langle x, y, x^2 + y^2\rangle$, $(x,y) \in D$, som gir $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} =$

$\langle -2x, -2y, 1\rangle$. Denne peker riktig vei, og vi får:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(x,y))\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\,dx\,dy\\
&= \iint_D \langle y, x^2+y^2, x\rangle\cdot\langle -2x,-2y,1\rangle\,dx\,dy\\
&= \int_0^1\int_{-\sqrt{\frac14-(x-\frac12)^2}}^{\sqrt{\frac14-(x-\frac12)^2}}(-2xy-2x^2y-2y^3+x)\,dy\,dx\\
&\overset{(*)}{=} \int_0^1\int_{-\sqrt{\frac14-(x-\frac12)^2}}^{\sqrt{\frac14-(x-\frac12)^2}} x\,dy\,dx\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta} r\cos\theta\, r\,dr\,d\theta = \frac13\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

så $$\iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \boxed{\tfrac{\pi}{8}}.$$

Likheten $(*)$ holder fordi de utelatte integralene involverer integrasjon av odde funksjoner av y over intervallet $\left[-\sqrt{\frac14-(x-\frac12)^2}, \sqrt{\frac14-(x-\frac12)^2}\,\right]$, som gir null (dette kunne en selvsagt også kommet frem til ved å regne ut integralene).

c) Projeksjonen av skjæringskurven C i xy-planet har ligning $r = r(\theta) = \cos\theta$ i polarkoordinater. Siden kurven ligger på flaten $z = x^2+y^2 = r^2$, kan vi parametrisere C med polarvinkelen θ som følger:

$$\mathbf{r}(\theta) = \langle r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta, r(\theta)^2\rangle = \langle\cos^2\theta, \cos\theta\sin\theta, \cos^2\theta\rangle, \quad -\pi/2\le\theta\le\pi/2\,.$$

Av dette ser vi at C ligger i planet $z = x$ (fordi $x(\theta) = \cos^2\theta = z(\theta)$). La S_3 være den delen av planet $z = x$ som ligger innenfor C, orientert slik at enhetsnormalen $\mathbf{n}$ har positiv z-komponent. Kurven C, med sin gitte orientering, blir da positivt orientert i forhold til S_3.

Parametriseringen $\mathbf{r}(x,y) = \langle x,y,x\rangle$ av S_3 gir $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y} = \langle -1,0,1\rangle$, som peker riktig vei. Videre har vi $\operatorname{curl}\mathbf{G} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ e^{\sin z} & x & -y\end{vmatrix} = \langle -1, e^{\sin z}\cos z, 1\rangle$. Stokes' teorem gir:

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_3}\operatorname{curl}\mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D \operatorname{curl}\mathbf{G}(\mathbf{r}(x,y))\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\,dx\,dy\\
&= \iint_D\langle -1, e^{\sin z}\cos z, 1\rangle\cdot\langle -1,0,1\rangle\,dx\,dy = \iint_D 2\,dx\,dy\\
&= 2\cdot\operatorname{areal}(D) = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \boxed{\tfrac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

Alternativer: Det fins flere måter å løse denne oppgaven på. For eksempel kan kurven C parametriseres ved $\mathbf{r}(t) = \langle\frac12+\frac12\cos t, \frac12\sin t, \frac12+\frac12\cos t\rangle$, $0\le t\le 2\pi$. -Kurveintegralet $\oint_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r}$ kan regnes ut direkte, uten bruk av Stokes. -Det at C ligger i planet $z = x$, kunne også vært benyttet i pkt. 7b), og ville gitt litt enklere regning der (fluksen gjennom S_1 og S_2 er også lik fluksen gjennom S_3).