Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Lisa Lorentzen 73 59 35 48

Vedlegg: Formelliste

EKSAMEN I FAG SIF5005/07 MATEMATIKK 2/2A

Bokmål
Tirsdag 1. august 2000
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
- Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Sensurfrist: 1. september 2000.

Oppgave 1 skal besvares uten begrunnelse. På de andre oppgavene må det være med så mye tekst og mellomregning at resonnementet kommer tydelig frem. Rene kalkulatorsvar godtas ikke.

Oppgave 1 Gitt vektorfeltet $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
For hvert av alternativene (i)–(iii) nedenfor angi med 'ja' eller 'nei' om det er lik fluksen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

til $\mathbf{F}$ ut gjennom kuleflaten S med senter i origo og radius $a > 0$:

$$(i) \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} 3r^2 \cos\theta \, dz\, dr\, d\theta \qquad (ii) \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 3\rho^3 \sin^2\varphi \, \cos\theta \, d\theta\, d\varphi\, d\rho$$

$$iii) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a 3\rho^2 \sin\varphi \, \cos\theta \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

Oppgave 2 Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y) = (e^y + ye^x + 2x)\mathbf{i} + (xe^y + e^x + 1)\mathbf{j}\,.$$

a) Vis at $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt.
Bestem en potensialfunksjon for $\mathbf{F}$, det vil si, bestem en funksjon $f(x,y)$ slik at $\nabla f = \mathbf{F}$.

b) Beregn arbeidet

$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds \quad \left(= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\right)$$

som $\mathbf{F}$ utfører ved å bevege en partikkel fra punktet $(0,1)$ til punktet $(0,e^{4\pi})$ langs kurven

$$C\colon \quad \mathbf{r}(t) = e^t \sin t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j}\,, \quad 0 \le t \le 4\pi.$$

c) Samme spørsmål som i **b)**, men med vektorfeltet $\mathbf{F}$ erstattet med

$$\mathbf{G}(x,y) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}\,.$$

Oppgave 3 En flate $z = f(x,y)$ i rommet har tangentplan

$$z = 2x - 3y + 5$$

i punktet $(1,1,4)$. Finn den retningsderiverte til f i punktet $(1,1)$ i retningen $\mathbf{i}+\mathbf{j}$.
La L være skjæringslinjen mellom tangentplanet i $(1,1,4)$ og planet $y = x$. Finn vinkelen som L danner med xy-planet.

Oppgave 4 Finn de høyeste og laveste punktene (det vil si, de med størst og minst z-koordinat) på skjæringskurven mellom flatene

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad \text{og} \qquad \ln(1-xy) - \frac{1}{2}(x^2+y^2) - z = 0\,.$$

Oppgave 5 La R være området i xy-planet begrenset av kurven $y = e^x$ og de rette linjene $x = 1$, $x = 2$ og $y = 1$. Beregn dobbeltintegralet

$$\iint_R |x-y|\,dA\,.$$

Oppgave 6 La C være sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, orientert mot urviseren. La videre

$$f(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{og} \quad g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\,.$$

Vis at

$$\oint_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = 2\pi$$

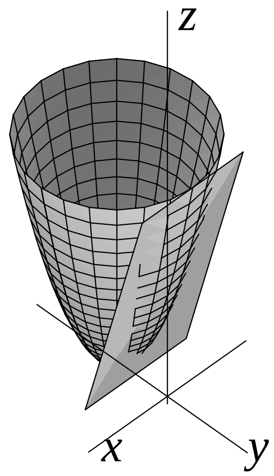
ved å regne ut linjeintegralet direkte.
La R være området begrenset av sirkelen C. Forklar hva som er galt med følgende resonnement, og hvorfor:

"Ved Greens teorem har vi

$$\oint_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\,dA = 0\,."$$

Oppgave 7 Legemet T er avgrenset av flatene

$$S_1: \quad z = 4y + 5 \qquad \text{og} \qquad S_2: \quad z = x^2 + (y+2)^2.$$



a) Finn y-koordinaten til sentroiden (tyngdepunktet) til T når T har massetetthet $\delta(x,y,z) = 1$.

b) La C være skjæringskurven mellom S_1 og S_2, orientert mot urviseren sett ovenfra. Beregn linjeintegralet

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds \quad \left(= \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\right)$$

der

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -y\,\mathbf{i} + y^2z^3\,\mathbf{j} + (x+y^6)\,\mathbf{k}\,.$$