LØSNINGSFORSLAG TIL SIF5005, 14. MAI, 2001

Oppgave 1. A: (vi). B: (ii)

Oppgave 2. Vi skal maksimere funksjonen $f(x, y, z) = xyz$ under bibetingelsen

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Lagrange' multiplikatormetode gir ligningssystemet

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \cdot \nabla g(x, y, z) \qquad \text{og} \quad g(x, y, z) = 1.$$

Det vil si,

$$\begin{aligned}
&(1) \quad yz = \lambda \cdot \frac{2x}{a^2}\\
&(2) \quad xz = \lambda \cdot \frac{2y}{b^2}\\
&(3) \quad xy = \lambda \cdot \frac{2z}{c^2}\\
&(4) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1
\end{aligned}$$

Det er klart at maksimum må inntreffe i et punkt der $x \neq 0$, $y \neq 0$ og $z \neq 0$. Vi kan derfor multiplisere ligningene (1) - (3) med henholdsvis x, y og z. Det gir

$$xyz = \lambda \cdot \frac{2x^2}{a^2} = \lambda \cdot \frac{2y^2}{b^2} = \lambda \cdot \frac{2z^2}{c^2}$$

slik at $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$. Innsatt i (4) gir det $3 \cdot \frac{x^2}{a^2} = 1$ slik at $x = \pm a/\sqrt{3}$, $y = \pm b/\sqrt{3}$ og $z = \pm c/\sqrt{3}$. Maksimum for $f(x, y, z)$ er derfor $\frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c}{\sqrt{3}} = \frac{abc}{3\sqrt{3}}$ (og minimum er $-\frac{abc}{3\sqrt{3}}$).

Oppgave 3. Ved kjerneregelen (kjederegelen) gjelder

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\rangle\\
&= \langle 2, 1, -4\rangle \cdot \frac{\langle 7, 5, 1\rangle}{|\langle 7, 5, 1\rangle|} \cdot 1000\ {}^\circ\text{C/h} = \frac{14 + 5 - 4}{\sqrt{49 + 25 + 1}} \cdot \frac{1000}{60}\ {}^\circ\text{C/min} = \frac{50}{\sqrt{3}}\ {}^\circ\text{C/min}.
\end{aligned}$$

Oppgave 4. La $f(x, y, z) = xz^2 - yz + \cos xy$. Da er

$$\vec{N}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \langle z^2 - y \sin xy,\ -z - x \sin xy,\ 2xz - y\rangle$$

en normalvektor til S i punktet (x, y, z). Spesielt er

$$\vec{N}(0, 0, 1) = \langle 1, -1, 0\rangle.$$

Punktet $(0,0,1)$ ligger både på flaten S $\quad (f(0,0,1)=1)$ $\quad$ og på den gitte kurven $(t=1)$. Tangentvektor til kurven i $(0,0,1)$ er $\vec{r}\,'(1)$ der $\vec{r}(t)=\langle \ln t,\, t\ln t,\, t\rangle$. Det vil si

$$\vec{r}\,'(1)=\langle \frac{1}{t},\, \ln t+1,\, 1\rangle\Big|_{t=1}=\langle 1,1,1\rangle.$$

Siden $\vec{N}(0,0,1)\cdot\vec{r}\,'(1)=\langle 1,-1,0\rangle\cdot\langle 1,1,1\rangle=0$, er $\vec{N}(0,0,1)$ en normalvektor til tangenten til kurven i $(0,0,1)$. Derfor ligger tangenten til kurven i normalplanet til flaten S.

Oppgave 5.

a). Kirkerommets volum

$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2+y^2\le 18^2}\left(20-\frac{x^2}{25}+\frac{y}{2}\right)dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{18}\left(20-\frac{r^2\cos^2\theta}{25}+\frac{r\sin\theta}{2}\right) r\,dr\,d\theta = 5430.24\,\pi. \end{aligned}$$

b). La $f(x,y)=20-x^2/25+y/2$, slik at taket til kirken er som en del av grafen til f. Da gir $|\nabla f(x,y)|$ den maksimale retningsderiverte i punktet (x,y). Vi har

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \langle -\frac{2x}{25},\, \frac{1}{2}\rangle \\ |\nabla f(x,y)| &= \sqrt{(\frac{2x}{25})^2+(\frac{1}{2})^2}\le\sqrt{(\frac{2\cdot 20}{25})^2+(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{2.81} \end{aligned}$$

for $x^2+y^2\le 400=20^2$. Siden $\tan 60^\circ=\sqrt{3}>\sqrt{2.81}$, er helningen på taket alltid mindre enn 60° med horisontalplanet. Altså kan takbelegget benyttes.

Oppgave 6. Vi legger T inn i et koordinatsysten slik at z–aksen følger symmetriaksen i T og xy–planet ligger i skjøten mellom del A og B. Da kan T beskrives i sylinderkoordinater ved

$$-\sqrt{4-r^2}\le z\le 4-2r \qquad \text{for } 0\le r\le 2,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

med massetetthet

$$\delta(r,\theta,z)=\begin{cases} 1/3 & \text{for } z>0, \\ 4/3 & \text{for } z<0. \end{cases}$$

Massen til T er

$$m=\left(\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 4\right)\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3\right)\cdot\frac{4}{3}=\frac{80\pi}{9}.$$

På grunn av symmetrien ligger tyngdepunktet $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ til T på z–aksen. Det vil si, $\overline{x}=0$, $\overline{y}=0$ og

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \frac{1}{m}\iiint_T z\cdot\delta\cdot dV = \frac{9}{80\pi}\Big\{\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-\sqrt{4-r^2}}^0 z\cdot\frac{4}{3}\cdot r\,dz\,dr\,d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-2r} z\cdot\frac{1}{3}\cdot r\,dz\,dr\,d\theta\Big\} = -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Avstanden mellom P og tyngdepunktet er derfor $4 + 2/5 = 22/5$.

Oppgave 7.
a).

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(2x+\cos yz) + \frac{\partial}{\partial y}(-\arctan y) + \frac{\partial}{\partial z}\left(1+\frac{z}{1+y^2}\right)\\ &= 2 - \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2} = 2.\end{aligned}$$

b). S er gitt ved $z = e^{1-x^2-y^2} - 1$ for $x^2+y^2 \le 1$. Sammen med flaten S_B: $z = 0$ for $x^2+y^2 \le 1$ danner den en enkel lukket flate. Ifølge divergensteoremet gjelder derfor

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{S_B} \vec{F}\cdot(-\vec{k})dA = \iiint_T \operatorname{div}\vec{F}\,dV,$$

der T er området innenfor den lukkede flaten. Det vil si,

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{e^{1-r^2}-1} 2\cdot r\,dz\,dr\,d\theta - \iint_{x^2+y^2\le 1} -(1+0)dA\\ &= 2\pi\int_0^1 2r(e^{1-r^2}-1)dr + (\text{arealet av } \ S_B) = \pi(2e-3).\end{aligned}$$

Oppgave 8. Flaten S har en rand som består av 4 glatte deler:

$$\begin{aligned}
&C_1: \quad x = t, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad 0 \le t \le 1,\\
&C_2: \quad x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta, \quad z = \theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,\\
&C_3: \quad x = 1-t, \quad y = 0, \quad z = 2\pi, \quad 0 \le t \le 1,\\
&C_4: \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 2\pi - t, \quad 0 \le t \le 2\pi.
\end{aligned}$$

La $P(x,y,z) = z$, $Q(x,y,z) = x^4y$ og $R(x,y,z) = 1 - x^2 - y^2$ betgne koordinatene til $\vec{G}$. Ifølge Stokes' teorem gjelder

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{curl}\vec{G}\cdot\vec{n}\,dS &= \int_{C_1}\vec{G}\cdot\vec{T}\,ds + \int_{C_2}\vec{G}\cdot\vec{T}\,ds + \int_{C_3}\vec{G}\cdot\vec{T}\,ds + \int_{C_4}\vec{G}\cdot\vec{T}\,ds\\
&= \int_{C_1} P\,dx + \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int_{C_3} P\,dx + \int_{C_4} R\,dz\\
&= \int_0^1 0\,dt + \int_0^{2\pi}\{\theta(-\sin\theta) + \cos^4\theta\sin\theta\cos\theta + 0\}d\theta + \int_0^1 2\pi(-dt) + \int_0^{2\pi} 1(-dt)\\
&= \left[-\sin\theta + \theta\cos\theta - \frac{\cos^6\theta}{6}\right]_0^{2\pi} - 2\pi - 2\pi = -2\pi.\end{aligned}$$