Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Vedlegg: Formelliste

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Krogstad 7359 3536
Dag Olav Kjellemo 7359 3549

EKSAMEN I FAG SIF5005 MATEMATIKK 2

Bokmål
Onsdag 8. august 2001
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: B2 – Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
– Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Sensuren faller 1. september.

Alle svar skal begrunnes, og det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgode svar.

Oppgave 1 Funksjonen f er definert ved

$$f(x, y) = x^3y + xy^2 + 40y.$$

a) Finn og klassifiser de kritiske punktene til f.

b) Finn største og minste verdi for $f(x, y)$ på området gitt ved

$$x^2 \leq y \leq x.$$

Er disse verdiene også maksimum og minimum for $f(x, y)$ i hele planet?

Oppgave 2 En flate S er gitt ved

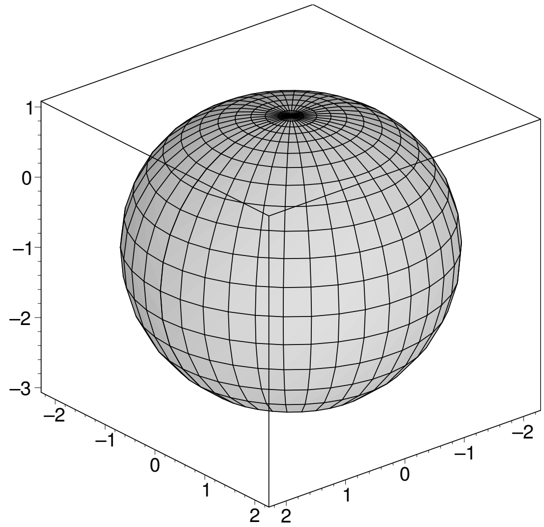
$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 16.$$

La T være tangentplanet til S i et punkt (a, b, c) på S. Finn ligningen for T.

Punktene (a, b, c) på S som er slik at punktet $(0, 0, 4)$ ligger på T, danner en kurve. Hvilken kurve?

Oppgave 3 Finn volumet til legemet avgrenset av flaten gitt i kulekoordinater ved

$$\rho = 2 - \cos\varphi.$$



Oppgave 4 Beregn trippelintegralet

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{z-4}\, dy\, dz\, dx$$

ved å bytte om integrasjonsrekkefølgen for x og z.

Oppgave 5 Undersøk om funksjonen definert ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - x^2y^2}{x^4 + y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

er kontinuerlig i origo. Undersøk videre om de partiellderiverte $f_x(0,0)$ og $f_y(0,0)$ eksisterer.

Oppgave 6 Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3 z\,\mathbf{i} + y^3 z\,\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\,\mathbf{k}.$$

La legemet T være halvkulen gitt ved

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq 0.$$

La S være overflaten til T, og la $\mathbf{n}$ være utadrettet enhetsnormal til S.

a) Finn div $\mathbf{F}$, og bestem $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

b) La S_1 være den krumme delen av S, og bestem $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

Oppgave 7 Bestem de deriverbare funksjonene f og g slik at vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z \cos x\,\mathbf{i} + zg(y)\,\mathbf{j} + \big(f(x) + y^2\big)\,\mathbf{k}$$

er konservativt og

$$\int_{(0,0,0)}^{(0,0,2)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 6.$$

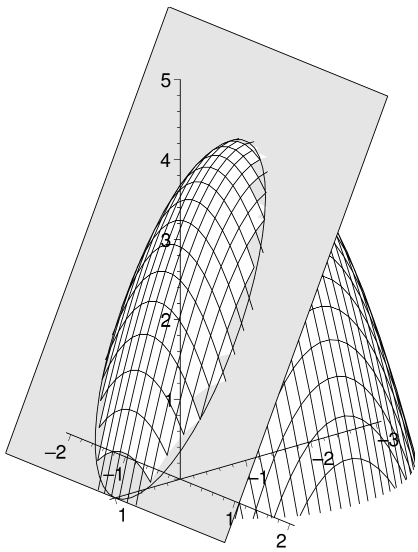
Oppgave 8 La

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} - (xz + 3x^2)\,\mathbf{j},$$

la S være den delen av paraboloiden $x^2 + 2x + y^2 + z = 3$ som ligger over planet $2x + z = 2$, og la C være skjæringskurven mellom planet og paraboloiden. Kontroller at Stokes' teorem holder for $\mathbf{F}$ og S ved å beregne begge integralene

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \quad \text{og} \quad \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

der $\mathbf{T}$ og $\mathbf{n}$ er riktig valgt.



FORMELLISTE

Annenderiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx},\ \ B = f_{xy},\ \ C = f_{yy}$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinater $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$
$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

Kulekoordinater $x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi,$
$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$

Flateintegral:

$$dS = |\mathbf{N}(u,v)|\,du\,dv = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

Tyngdepunkt for romlige legemer:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint\limits_T x\,dm, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iiint\limits_T y\,dm, \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint\limits_T z\,dm, \qquad dm = \delta\,dV$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Divergensteoremet: $$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint\limits_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint\limits_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$$

Stokes' teorem: $$\oint\limits_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint\limits_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint\limits_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$\text{der } \nabla = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$$