SIF5005 Matematikk 2, 13. mai 2002

Løsningsforslag

Oppgave 1

ALTERNATIV 1: At de to ligningene skjærer hverandre vil si at det finnes parameterverdier u og v som, innsatt i de to parametriseringene, gir samme punkt:

$$u + 1 = v + 2, \quad 2u - 1 = 3v - 2, \quad 2u + 2 = 2v + 4.$$

Vi løser hver ligning med hensyn på u:

$$u = v + 1, \quad u = \tfrac{3}{2}v - \tfrac{1}{2}, \quad u = v + 1.$$

De to første gir $v + 1 = \frac{3}{2}v - \frac{1}{2}$, som har løsning $v = 3$. Det gir $u = 4$, og alle ligningene er oppfylt, slik at vi får et skjæringspunkt. Setter vi inn får vi posisjonsvektoren for dette punktet:

$$\mathbf{r}_0 = \langle 5, 7, 10 \rangle.$$

De to linjene har retningsvektorer $\langle 1, 2, 2 \rangle$ og $\langle 1, 3, 2 \rangle$. En normalvektor for planet blir kryssproduktet av disse to:

$$\mathbf{n} = \langle 1, 2, 2 \rangle \times \langle 1, 3, 2 \rangle = \langle -2, 0, 1 \rangle.$$

En ligning for planet som inneholder de to linjene blir dermed $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$, som skrevet ut i koordinater blir $-2(x - 5) + 0(y - 7) + 1(z - 10) = 0$; altså

$$-2x + z = 0.$$

ALTERNATIV 2: Vi ser direkte at begge linjene oppfyller $z = 2x$, så det er i det minste ligningen for ett plan som inneholder både L_1 og L_2. En retningsvektor for L_1 er $\langle 1, 2, 2 \rangle$, og en retningsvektor for L_2 er $\langle 1, 3, 2 \rangle$. Siden de to retningsvektorene ikke er parallelle og begge linjene ligger i ett plan, må de skjære hverandre (og planet med ligning $z = 2x$ er det eneste planet som inneholder L_1 og L_2).

Oppgave 2

Vi finner $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. $\mathbf{v}$ må være parallell med denne, men motsatt rettet. Videre er $\nabla f = \langle yz, xz, xy \rangle$, så vi finner at den retningsderiverte blir

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot \nabla f(1, -1, 2) = \tfrac{1}{3}\langle 1, -2, 2 \rangle \cdot \langle -2, 2, -1 \rangle = -\tfrac{8}{3}.$$

Oppgave 3

Lagranges metode med den gitte funksjonen og føringen $g(x,y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2 - 1 = 0$ leder til ligningene

$$y = \tfrac{1}{2}\lambda x, \quad x = 2\lambda y, \quad \tfrac{1}{4}x^2 + y^2 = 1.$$

Da må $x \neq 0$ og $y \neq 0$, for om én av de to er null, er også den andre det (ved en av de to første ligningene), men da kan ikke den tredje ligningen holde. Vi kan løse de to første ligningene med hensyn på λ, og får henholdsvis $\lambda = 2y/x$ og $\lambda = x/(2y)$. Så $2y/x = x/(2y)$, og opprydding gir $x^2 = 4y^2$. Vi setter det inn i den tredje ligningen og får $y^2 + y^2 = 1$, altså $y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Vi ender med fire mulige ekstrempunkter for f på ellipsen:

$$\Big(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$$

der alle fire kombinasjoner av de to fortegnene $\pm$ forekommer.

For å komme videre er det greiest å bestemme funksjonen f så langt vi kan. Mange vil nok med én gang se at $f(x,y) = xy$ har de gitte partiellderiverte, så vi vet at $f(x,y) = xy + C$. (Eventuelt kan man bruke metoden fra alternativ 2 i løsningen av oppgave 5.) Dette setter vi inn i de fire punktene:

$$f\big(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\big) = f\big(-\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\big) = 1 + C, \quad f\big(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\big) = f\big(-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\big) = -1 + C$$

og de varmeste punktene er derfor

$$\pm\Big(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

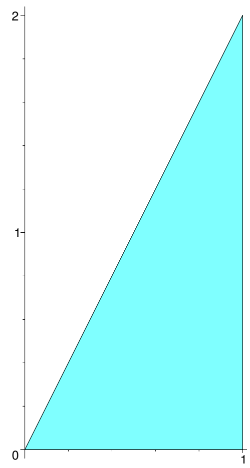
Oppgave 4

Den gitte parameterfremstillingen gir

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (\cos v)\mathbf{i} + (\sin v)\mathbf{j},$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -(u \sin v)\mathbf{i} + (u \cos v)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

og dermed

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (\sin v)\mathbf{i} - (\cos v)\mathbf{j} + u\mathbf{k},$$
$$\Big|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Big| = \sqrt{1 + u^2}.$$



Vi har nå valget mellom de to integrasjonsrekkefølgene

$$\int_0^2 \int_{v/2}^1 \sqrt{1+u^2}\,du\,dv \text{ og } \int_0^1 \int_0^{2u} \sqrt{1+u^2}\,dv\,du.$$

Det siste valget gir enklest integrasjon:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_0^{2u} \sqrt{1+u^2}\,dv\,du = \int_0^1 2u\sqrt{1+u^2}\,du \\ &= \Big[\tfrac{2}{3}(1+u^2)^{3/2}\Big]_0^1 = \tfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

Oppgave 5

Vi skriver $\mathbf{F} = \langle P, Q\rangle$ med $P(x,y) = \sin xy + xy\cos xy$ og $Q(x,y) = x^2\cos xy$, og finner

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x\cos xy - x^2 y \sin xy = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

så $\mathbf{F}$ er konservativt, siden definisjonsområdet (hele planet) er et rektangel.

Alternativ 1: Dermed er linjeintegralet uavhengig av veien, og siden C er en kurve fra $(1,1)$ til $(1, e^{2\pi})$ kan vi like godt integrere langs den rette linjen mellom de to punktene, som gir

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_1^{e^{2\pi}} Q(1,y)\,dy = \int_1^{e^{2\pi}} \cos y\,dy = \sin e^{2\pi} - \sin 1.$$

Alternativ 2: Vi kan prøve å finne en potensialfunksjon f for $\mathbf{F}$. Den skal oppfylle

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y) = \sin xy + xy\cos xy \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y) = x^2\cos xy.$$

Enklest å integrere er den siste av de to, som gir

$$f(x,y) = x\sin xy + g(x)$$

for en funksjon g. Vi setter det inn i den første ligningen og får

$$\sin xy + xy\cos xy + g'(x) = \sin xy + xy\cos xy$$

slik at $g'(x) = 0$, og g er konstant. Vi kan like godt velge $g(x,y) = 0$, slik at $f(x,y) = x\sin xy$. Dermed blir

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(1, e^{2\pi}) - f(1,1) = \sin e^{2\pi} - \sin 1.$$

Oppgave 6

Vi vil bruke divergensteoremet, og regner derfor ut

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 12z.$$

Dermed er altså

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = 12\iiint_T z\,dV.$$

Neste trinn blir å regne ut dette integralet.

Flaten $z = 9 - x^2 - z^2$ er en rotasjonsparaboloide med åpningen ned. Vi skal bare ha med den delen der $z \geq 0$: Randen av denne delen blir sirkelen i xy-planet med sentrum i origo og radius 3.

Flaten $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ er et overflaten av en kule med sentrum i origo og radius 3. Vi skal bare ha nedre halvkule, og ser at kanten på denne er sirkelen beskrevet ovenfor.

Det er formodentlig greiest å beskrive T i sylinderkoordinater:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 3, \quad -\sqrt{9-r^2} \leq z \leq 9 - r^2.$$

Dette gir oss endelig

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= 12\iiint_T z\,dV = 12\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{-\sqrt{9-r^2}}^{9-r^2} z\,dz\,r\,dr\,d\theta \\ &= 24\pi\int_0^3 \Big[\tfrac{1}{2}z^2\Big]_{-\sqrt{9-r^2}}^{9-r^2} r\,dr = 12\pi\int_0^3 \big((9-r^2)^2 - (9-r^2)\big)r\,dr \\ &= -6\pi\Big[\tfrac{1}{3}(9-r^2)^3 - \tfrac{1}{2}(9-r^2)^2\Big]_0^3 = 1215\pi.\end{aligned}$$

Oppgave 7

a Ligningen for R_a er $x^2 + (y-a)^2 = a^2$, som forenkles til $x^2 + y^2 = 2ay$. I polarkoordinater blir dette $r^2 = 2ar\sin\theta$, det vil si $r = 2a\sin\theta$. Sirkelen ligger i øvre halvplan og tangerer x-aksen i origo, så θ skal variere over intervallet $[0,\pi]$. Dermed blir

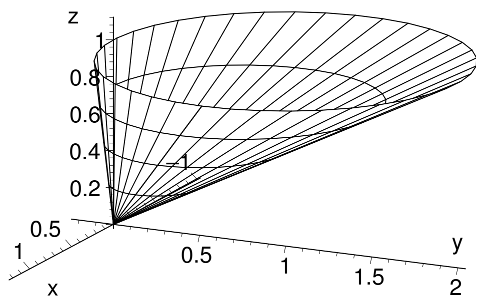
$$\begin{aligned}\iint_{R_a} (x^2+y^2)\,dA &= \int_0^\pi\int_0^{2a\sin\theta} r^2\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^\pi \Big[\tfrac{1}{4}r^4\Big]_0^{2a\sin\theta} d\theta \\ &= 4a^4\int_0^\pi \sin^4\theta\,d\theta = a^4\Big[-\sin^3\theta\cos\theta\Big]_0^\pi + 3a^4\int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta \\ &= 0 - \tfrac{3}{2}a^4\Big[\sin\theta\cos\theta\Big]_0^\pi + \tfrac{3}{2}a^4\int_0^\pi \sin^0\theta\,d\theta \\ &= 0 + \tfrac{3}{2}a^4\int_0^\pi d\theta = \tfrac{3}{2}\pi a^4.\end{aligned}$$

b Det oppgitte integralet er på formen $\oint_C P\,dx + Q\,dy$ med $P = e^x - y^3$ og $Q = x^3 - e^y$. Vi kan bruke Greens teorem på området R_1 [samme notasjon som i punkt **a**]:

$$\begin{aligned}\oint_C P\,dx + Q\,dy &= \iint_{R_1} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dA \\ &= \iint_{R_1} (3x^2 + 3y^2)\,dA = \tfrac{9}{2}\pi\end{aligned}$$

ved resultatet fra punkt **a**.

c Et plan parallelt med xy-planet er gitt ved $z = a$. Setter vi inn dette i den gitte ligningen får vi $x^2 + y^2 = 2ay$, som er ligningen for randen til sirkelen R_a. Planet $z = a$ skjærer altså flaten i en sirkel med sentrum i $(0, a, a)$ og radius a. Det kan også være nyttig å merke seg at $x = 0$ innsatt i ligningen gir $y = 0$ eller $y = 2z$.



Med z-integralet ytterst får vi

$$\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2)\,dV = \int_0^1 \iint_{R_z} (x^2 + y^2 + z^2)\,dA\,dz$$

Her må vi huske på at z er en konstant i det innerste integralet. Vi benytter resultatet fra punkt **a**:

$$\begin{aligned}\iint_{R_z} (x^2 + y^2 + z^2)\,dA &= \iint_{R_z} (x^2 + y^2)\,dA + \iint_{R_z} z^2\,dA = \tfrac{3}{2}\pi z^4 + z^2\,\text{areal}(R_z) \\ &= \tfrac{3}{2}\pi z^4 + z^2 \pi z^2 = \tfrac{5}{2}\pi z^4\end{aligned}$$

og dermed

$$\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2)\,dV = \tfrac{5}{2}\pi \int_0^1 z^4\,dz = \tfrac{1}{2}\pi.$$

KOMMENTAR: Vi kan stille opp og løse integralet med z-integralet innerst, men regningene blir noe mer kompliserte.

Oppgave 8

Implisitt derivasjon der vi antar at x og u er frie variabler og t er en funksjon av x og u gir (hvor uttrykket i hakeparentesen er den partiellderiverte av uttrykket med hensyn på t, og leddene til venstre er de de partiellderiverte med hensyn på henholdsvis x og u):

$$\begin{aligned} 2x + \bigl[\ln u + \tfrac{1}{2}\bigl(\ln(\pi t) + 1\bigr)\bigr]\frac{\partial t}{\partial x} &= 0, \\ \frac{t}{u} + \bigl[\ln u + \tfrac{1}{2}\bigl(\ln(\pi t) + 1\bigr)\bigr]\frac{\partial t}{\partial u} &= 0. \end{aligned}$$

Her er det best å sette inn de gitte verdiene $x = 1$, $t = 1$ og $u = 1/(e\sqrt{\pi})$ jo før jo heller. Siden $\ln u = -1 - \frac{1}{2}\ln\pi$ blir innholdet i hakeparentesen lik $-\frac{1}{2}$, og dermed ender vi med

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 4, \quad \frac{\partial t}{\partial u} = 2e\sqrt{\pi} \approx 9{,}636,$$

vel og merke kun i det gitte punktet. Vi finner videre

$$\begin{aligned} t(1{,}1, 0{,}2) &\approx t\bigl(1, 1/(e\sqrt{\pi})\bigr) + \frac{\partial t}{\partial x}\cdot(1{,}1 - 1) + \frac{\partial t}{\partial u}\cdot\bigl(0{,}2 - 1/(e\sqrt{\pi})\bigr) \\ &\approx 1 + 4\cdot 0{,}1 + 9{,}636\cdot(-0{,}008) \approx 1{,}323. \end{aligned}$$

Merknad for de nysgjerrige: Ligningen i oppgave 8 oppstår naturlig ved studiet av *varmeledning.* Ved en passe skalering kan varmeledningsligningen i én romdimensjon skrives

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

En bestemt løsning av denne, som beskriver effekten av en plutselig, lokalisert tilførsel av en enhet energi i origo ved tid $t = 0$, kan skrives på formen

$$u = \frac{e^{-x^2/t}}{\sqrt{\pi t}}.$$

Tar vi logaritmen og rydder litt får vi formelen oppgitt i oppgaven. Å skrive t som en funksjon av x og u svarer til å stille spørsmålet: Hvor lang tid tar det i punktet x før temperaturen er steget med u?