Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Runar Ile tlf. 73 55 02 81
Marius Irgens tlf. 73 55 02 84
Lisa Lorentzen tlf. 73 59 35 48

EKSAMEN I SIF5005 MATEMATIKK 2

Bokmål
Mandag 12. mai 2003
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 16. juni 2003

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Finn og klassifiser alle kritiske punkt for funksjonen

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + xy.$$

b) I hvilken retning er den retningsderiverte til $f(x, y)$ størst i punktet $(1, 2)$? Hvor stor er den i denne retningen? Hvor stor er den retningsderiverte i dette punktet med retning mot origo?

Oppgave 2 Kurven C er skjæringskurven mellom de to flatene med ligninger

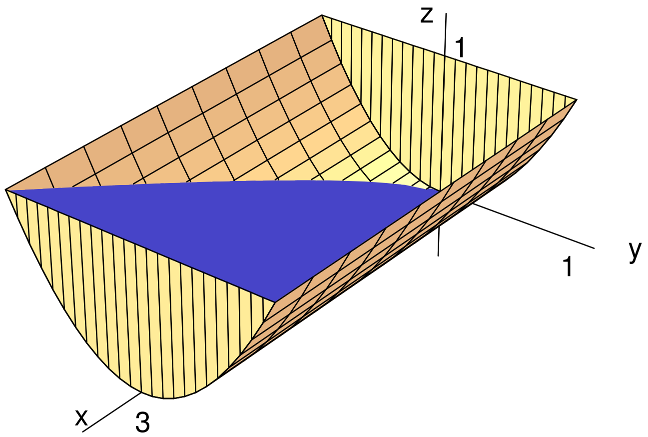
$$x^2 + y^2 - z = 1, \quad xyz = 1$$

for $x > 0$, $y > 0$ og $z > 0$.

a) Ett punkt på C ligger nærmest z-aksen. Hvilket?
(*Hint*: En mulighet er å minimalisere $x^2 + y^2$ med to bibetingelser.)

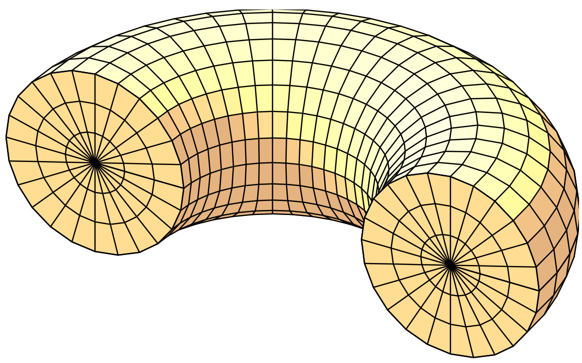
b) Et romskip følger kurven C. Idet romskipet passerer punktet $(1 + 1/\sqrt{2}, 1 - 1/\sqrt{2}, 2)$ har det en slik hastighet at $dy/dt = 1$. Hva er dx/dt og dz/dt i dette øyeblikket?

Oppgave 3



Trauet i figuren har bunn gitt ved $z = y^2$ for $|y| \leq 1$, og ender i $x = 0$ og $x = 3$. Still opp og løs et trippelintegral for volumet av trauet. Trauet var helt fylt med vann, men så kommer noen og løfter den ene enden så vannflaten akkurat når bunnen av den ene endeflaten mens vannet står til toppen av den andre endeflaten. Hvor stor brøkdel av vannet har rent ut? (Svaret er *ikke* $\frac{1}{2}$.)

Oppgave 4



Vektorfeltet $\mathbf{G} = -xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ er gitt. Den krumme delen S av overflaten til den halve smultringen T på figuren kan parametriseres ved

$$\mathbf{r}(\theta, \psi) = (2 + \cos\psi)\cos\theta\,\mathbf{i} + (2 + \cos\psi)\sin\theta\,\mathbf{j} + \sin\psi\,\mathbf{k}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \psi < 2\pi.$$

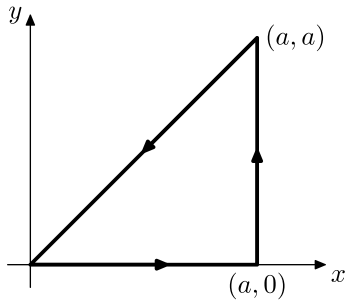
(Du skal ikke vise dette.)

a) Regn ut $\operatorname{div}\mathbf{G}$ og $\operatorname{curl}\mathbf{G}$.

b) Regn ut $\partial\mathbf{r}/\partial\theta$. Gjør rede for at denne vektoren er parallell med $\mathbf{G}$ på hele S. Hvorfor følger det av dette at $\mathbf{G} \cdot \mathbf{n} = 0$ på S, der $\mathbf{n}$ er enhetsnormalen til S?

c) Bruk resultater fra punkt **a)** og **b)** til å uttrykke $\iiint_T y\,dV$ ved et integral over et område i xz-planet. Du skal ikke regne ut verdien av integralet.

Oppgave 5



a) Finn verdien av integralet

$$\oint_C e^{y^2-x^2}\cos 2xy\,dx + e^{y^2-x^2}\sin 2xy\,dy$$

der C er den lukkede kurven antydet i figuren, og a er en positiv konstant.

b) Finn verdien av integralet

$$\int_0^\infty (\cos 2x^2 + \sin 2x^2)\,dx.$$

Du kan bruke, uten bevis, at

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{og} \quad \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{y^2-a^2}\sin 2ay\,dy = 0.$$

FORMELLISTE

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\mathbf{N}(t)$$

Diskriminanten i annenderiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx},\ B = f_{xy},\ C = f_{yy}$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinater $(r,\,\theta,\,z)$: $x = r\,\cos\theta,\quad y = r\,\sin\theta,\quad z = z,$
$r^2 = x^2 + y^2,\quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

Kulekoordinater $(\rho,\,\varphi,\,\theta)$: $x = \rho\,\sin\varphi\,\cos\theta,\quad y = \rho\,\sin\varphi\,\sin\theta,\quad z = \rho\,\cos\varphi,$
$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,\quad dV = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$

Flateintegral:

$$dS = |\mathbf{N}(u,v)|\,du\,dv = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

Tyngdepunkt for romlige legemer:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,dm, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,dm, \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,dm$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Divergensteoremet: $$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$$

Stokes' teorem: $$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$$