Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Sigmund Selberg tlf. 50284

EKSAMEN I TMA4105 MATEMATIKK 2

Bokmål
Lørdag 14. aug 2004
kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Typegodkjent kalkulator (HP 30S) med tomt minne
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 1. september 2004

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Finn grenseverdien

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$$

eller forklar hvorfor den ikke eksisterer.

Oppgave 2 La a være et gitt reelt tall. La P være planet som går gjennom punktene $(0,1,0)$ og $(1,a,3)$ og står normalt på planet $y = 3z$.

a) Vis at

$$z = 3 + 3ax - 3y$$

er en ligning for planet P.

b) For hvilke verdier av konstanten a vil planet P tangere flaten

$$-36x^2 + 9y^2 + z^2 = 9$$

i et eller annet punkt?

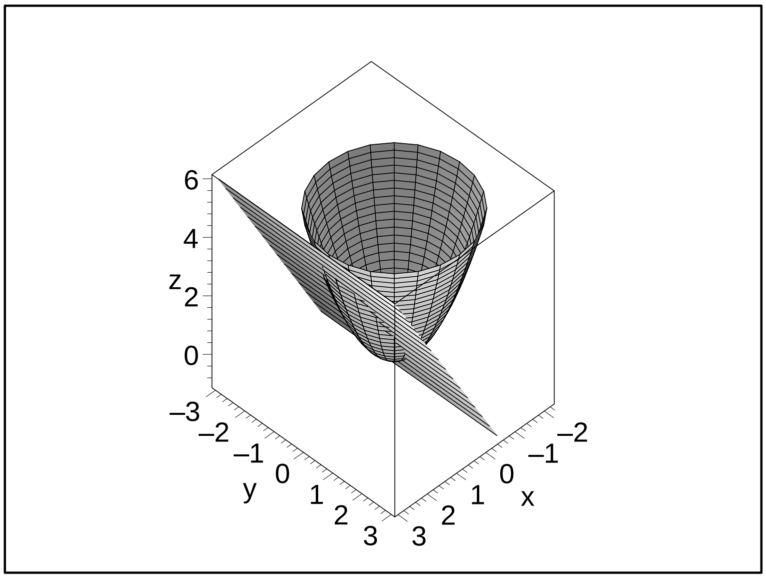
Oppgave 3 La T være legemet avgrenset av de to flatene

$$z = 2x \qquad \text{og} \qquad z = x^2 + y^2,$$

og la C betegne skjæringskurven mellom disse to flatene.

La videre S betegne overflaten til T, og la $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (4x + y)\mathbf{i} - (x + 4y + z)\mathbf{j} + (2y + 4z)\mathbf{k}.$$



a) Vis at projeksjonen av C i xy–planet er en sirkel.
Beregn arealet A av den plane delen av S.

b) Beregn volumet V av T.

c) Beregn

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \qquad \text{og} \qquad \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

der $\mathbf{n}$ er ytre enhetsnormal til S, og S_1 er den krumme delen av S.

d) Beregn

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

der C er orientert mot klokken sett ovenfra og $\mathbf{T}$ er enhetstangentvektoren til C.

(*Hint:* Avhengig av hvordan du løser oppgaven, kan du få bruk for at $\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{3\pi}{16}$.)

Oppgave 4 Finn en parametrisering for flaten du får når kurven

$$z = 1/y \qquad \text{for} \quad y > 0$$

i yz–planet roteres om z–aksen.

Oppgave 5 La C være skjæringskurven mellom de to flatene

$$z + \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{y}{x} = 0 \qquad \text{og} \qquad x^2 + y^2 - z - 2 = 0$$

for $x > 0$.

a) Vis at $[3, -5, -4]$ er en tangentvektor til C i punktet $(1, 1, 0)$.

b) En værballong følger kurven C. Hvor stor temperaturendring per lengdeenhet utsettes ballongen for, idet den passerer punktet $(1, 1, 0)$ med økende x-koordinat, når temperaturfordelingen i en omegn om punktet er gitt ved

$$T(x, y, z) = \frac{x - y}{1 + z^2}\,?$$