Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN TMA4105 MATEMATIKK 2

Lørdag 14. aug 2004

Oppgave 1

Grenseverdien eksisterer ikke. For eksempel er grenseverdien lik 1 når (x, y) nærmer seg origo langs x-aksen og lik -1 når (x, y) nærmer seg origo langs y-aksen.

Oppgave 2

a) Når a er et tall, er

$$z = 3 + 3ax - 3y$$

ligningen for et plan med normalvektor $\mathbf{N}_1 = [3a, -3, -1]$.

Punktene $(0, 1, 0)$ og $(1, a, 3)$ ligger i planet fordi koordinatene passer i ligningen for planet:

$$0 = 3 + 3a \cdot 0 - 3 \cdot 1 \qquad 3 = 3 + 3a \cdot 1 - 3 \cdot a$$

Planet står normalt på planet $y = 3z$ med normalvektor $\mathbf{N}_2 = [0, 1, -3]$ dersom $\mathbf{N}_1 \perp \mathbf{N}_2$. Dette holder fordi

$$\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 = 3a \cdot 0 - 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) = 0.$$

b) Vi kaller den gitt flaten for S. Planet P tangerer flaten S i punktet (p, q, r) hvis og bare hvis :

- (p, q, r) ligger i P, det vil si

  $$r = 3 + 3ap - 3q \qquad (1)$$

- (p, q, r) ligger i S, det vil si

  $$-36\,p^2 + 9\,q^2 + r^2 = 9 \qquad (2)$$

- Normalen til P i (p, q, r) er parallell med normalen til S i (p, q, r), det vil si

  $$\nabla(3 + 3ax - 3y - z) = k \cdot \nabla(-36\,x^2 + 9\,y^2 + z^2 - 9)$$

  i punktet (p, q, r). Altså

  $$[3a, -3, -1] = k \cdot [-72p, 18q, 2r]$$

som gir de tre ligningene

$$3a = -72kp \qquad (3)$$

$$-3 = 18kq \qquad (4)$$

$$-1 = 2kr \qquad (5)$$

Derved har vi 5 ligninger med 5 ukjente: p, q, r, k og a. Ved å løse ligningssystemet, finner vi at det har akkurat to løsninger, nemlig

$$p = 1/2, \quad q = 1, \quad r = 3, \quad a = 2, \quad \text{og} \quad k = -1/6$$

$$p = -1/2, \quad q = 1, \quad r = 3, \quad a = -2, \quad \text{og} \quad k = -1/6$$

Altså tangerer P flaten S dersom $a = 2$ eller $a = -2$.

Oppgave 3

a) Projeksjonen av C i xy–planet har ligningen

$$2x = x^2 + y^2 \qquad \text{det vil si,} \qquad (x-1)^2 + y^2 = 1$$

som er ligningen for en sirkel med sentrum i $(1, 0)$ og radius 1.

La C_1 betegne denne sirkelen og la R betegne området innenfor C_1 i xy-planet.

Den plane delen S_2 av S er gitt ved

S_2: $\quad z = 2x \quad$ for $(x, y) \in R$. Arealet A av S_2 er derfor

$$A = \iint_{S_2} dS = \iint_R \sqrt{1 + 2^2 + 0^2}\, dA = \sqrt{5} \cdot (\text{arealet av } R) = \sqrt{5}\,\pi$$

der vi har brukt at i spesialtilfelle 1, der flaten er gitt ved $z = f(x, y)$, er $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy$.

b) Vi ruter opp projeksjonen R av T. For hver rute får vi en søyle som går fra paraboloiden $z = x^2 + y^2$ til planet $z = 2x$. Volumet blir derfor

$$V = \iint_R (2x - (x^2 + y^2)) dA.$$

Vi gjør om til polarkoordinater. Da er $2x = 2r\cos\theta$, $x^2 + y^2 = r^2$ og $dA = r\, dr\, d\theta$. Videre er R beskrevet ved

$$x^2 + y^2 \leq 2x \qquad \text{det vil si} \quad r^2 \leq 2r\cos\theta \qquad \text{altså} \quad 0 \leq r \leq 2\cos\theta$$

der θ løper mellom $-\pi/2$ og $\pi/2$. (Tegn figur.) Altså:

$$V = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r=0}^{2\cos\theta} (2r\cos\theta - r^2) r\, dr\, d\theta = \frac{4}{3} \int_{-pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

c) S er en lukket flate. Divergensteoremet gir derfor at

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_T \text{div}\mathbf{F}\, dV$$

der

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(4x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(x+4y+z) + \frac{\partial}{\partial z}(2y+4z) = 4-4+4 = 4.$$

Altså

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T 4\,dV = 4V = 2\pi.$$

Fluksen ut av den plane delen S_2 av S er $\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$.

Siden S_2 kan beskrives ved $2x - z = 0$, er

$$\mathbf{N}_2 = \nabla(2x-z) = [2,0,-1]$$

en normalvektor til S_2. Den peker inn i T. (Se figuren.) Altså er

$$\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{N}_2}{|\mathbf{N}_2|} = -\frac{1}{\sqrt{5}}[2,0,-1] = \frac{1}{\sqrt{5}}[-2,0,1].$$

Som i a) er $dS = \sqrt{5}\,dA$, og vi får at den totale fluksen ut gjennom S_2 er

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_R [4x+y, -(x+4y+2x), 2y+4\cdot 2x]\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}[-2,0,1]\cdot\sqrt{5}\,dA$$

$$= \iint_R (-8x-2y+2y+8x)dA = \iint_R 0\,dA = 0.$$

Altså er det ingen netto fluks ut av S_2. Derfor er

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = 2\pi.$$

d) Alternativ 1:

C er en lukket kurve i rommet. Den er randen til den plane delen S_2 av S. Ved Stokes teorem gjelder derfor:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_{S_2} \mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

der

$$\mathrm{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 4x+y & -x-4y-z & 2y+4z \end{vmatrix} = [3,0,-2].$$

I c) fant vi at $dS = \sqrt{5}\,dA$ og at $\mathbf{n} = [-2,0,1]/\sqrt{5}$ er enhetsnormalen til S_2 som peker ut av T. Retningen stemmer også nå. Derfor er

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_R [3,0,-2]\cdot[-2,0,1]\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}\,dA = -8\iint_R dA = -8\pi.$$

Alternativ 2:

Vi vil regne kurveintegralet slik det står. Da trenger vi en parametrisering av C. Siden projeksjonen av C i xy-planet er sirkelen med sentrum i $(1, 0)$ og radius 1, har den en parametrisering gitt ved $x = 1 + \cos u$, $y = \sin u$ for $0 \le u \le 2\pi$. (Dette er en av mange muligheter.) Siden $z = 2x$ langs C, har C en parametrisering

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u) = [1 + \cos u, \sin u, 2 + 2\cos u] \quad \text{for } \ 0 \le u \le 2\pi.$$

Denne parametriseringen viser seg å gi riktig orientering av C også. Derved er

$$\begin{aligned}
&\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(u)\, du \\
&= \int_0^{2\pi} [4 + 4\cos u + \sin u, -1 - \cos u - 4\sin u - 2 - 2\cos u, \\
&\qquad 2\sin u + 8 + 8\cos u] \cdot [-\sin u, \cos u, -2\sin u] du \\
&= \int_0^{2\pi} (-20\sin u - 3\cos u - 24\sin u\cos u - 5\sin^2 u - 3\cos^2 u) du \\
&= \int_0^{2\pi} (-5\sin^2 u - 3\cos^2 u) du = (-5 - 3)\pi = -8\pi
\end{aligned}$$

fordi

$$\int_0^{2\pi} \sin u\, du = \int_0^{2\pi} \cos u\, du = \int_0^{2\pi} \sin u \cos u\, du = 0 \quad \text{og} \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 u\, du = \int_0^{2\pi} \cos^2 u\, du = \pi.$$

Oppgave 4 Punktet $(a, 1/a)$ på kurven beskriver en sirkel

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 1/a$$

under rotasjonen. Den kan for eksempel parametriseres ved

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad z = 1/a \quad \text{for } \ 0 \le \theta \le 2\pi$$

der $a > 0$ bestemmer hvilket punkt som roteres. For å få hele flaten, må a gjennomløpe alle de positive tallene. Rotasjonsflaten har derfor parametrisering

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad z = 1/a \quad \text{for } \ a > 0 \ \text{ og } \ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Oppgave 5

a) Vi lar S_1 betegne flaten $z + \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{y}{x} = 0$ og S_2 betegne flaten $x^2 + y^2 - z - 2 = 0$. Vektoren $\mathbf{v} = [3, -5, -4]$ er en tangentvektor til C i punktet $(1, 1, 0)$ hvis og bare hvis $\mathbf{v}$

står normalt både på en normalvektor $\mathbf{N}_1$ til S_1 i $(1,1,0)$ og en normalvektor $\mathbf{N}_2$ til S_2 i $(1,1,0)$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N}_1 &= \nabla\left(z + \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{y}{x}\right)\Big|_{(1,1,0)} = \left[-\frac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right), -\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x}, 1\right]_{(1,1,0)} \\
&= \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right] \\
\mathbf{N}_2 &= \nabla(x^2+y^2-z-2)\Big|_{(1,1,0)} = [2x, 2y, -1]_{(1,1,0)} = [2,2,-1].
\end{aligned}
$$

Vi har at $\mathbf{N}_1 \perp \mathbf{v}$ og $\mathbf{N}_2 \perp \mathbf{v}$ hvis og bare hvis $\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{v} = 0$ og $\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{v} = 0$. Her er

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{v} &= [\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1] \cdot [3,-5,-4] = \tfrac{3}{2} + \tfrac{5}{2} - 4 = 0 \\
\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{v} &= [2,2,-1] \cdot [3,-5,-4] = 6 - 10 + 4 = 0.
\end{aligned}
$$

Altså er $\mathbf{v}$ en tangentvektor.

b) Ballongen går i retningen $[3,-5,-4]$ gjennom punktet $(1,1,0)$. Temperaturendringen per lengdeenhet idet den passerer punktet, er derfor den retningsderiverte til $T(x,y,z)$ i retningen $[3,-5,-4]$ i punktet $(1,1,0)$.

$$
\mathbf{u} = \frac{[3,-5,-4]}{|[3,-5,-4]} = \frac{[3,-5,-4]}{\sqrt{9+25+16}} = \frac{[3,-5,-4]}{5\sqrt{2}}.
$$

$$
D_{\mathbf{u}}T(x,y,z) = \nabla T(x,y,z) \cdot \mathbf{u} = \left[\frac{1}{1+z^2}, \frac{-1}{1+z^2}, -\frac{x-y}{(1+z^2)^2}\cdot 2z\right] \cdot \mathbf{u}.
$$

$$
D_{\mathbf{u}}T(1,1,0) = [1,-1,0] \cdot \frac{[3,-5,-4]}{5\sqrt{2}} = \frac{8}{5\sqrt{2}} = \frac{4}{5}\sqrt{2}.
$$