LØSNINGSFORSLAG

TMA4105 Matematikk 2

8. August 2005

Oppgave 1 Vi introduserer funksjonen $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2$ slik at flaten $z^2 = x^2 + 2y^2$ er gitt ved $g(x, y, z) = 0$. I dette tilfellet utgjør gradienten til g en normalvektor til flaten. Vi har

$$\nabla g = [2x, 4y, -2z] \tag{1}$$

og, i punktet P,

$$\mathbf{N} = [2, 8, -6] \tag{2}$$

er en normalvektor. Et punkt M med koordinater $[x, y, z]$ tilhører tangentplanet hvis og bare hvis vektoren $\overrightarrow{PM}$ er perpendikulær til $\mathbf{N}$, i.e., $\overrightarrow{PM} \cdot \mathbf{N} = 0$. Derfor er tangentplanet gitt ved

$$2(x-1) + 8(y-2) - 6(z-3) = 0 \tag{3}$$

som gir

$$2x + 8y - 6z = 0.$$

En punkt M med koordinater $[x, y, z]$ som har det samme tangentplanet som P må ha sin normalvektor paralell til $\mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ er gitt i (2)). Derfor må vi ha

$$\nabla g \times \mathbf{N} = 0. \tag{4}$$

Fra (1) og (2) får vi at

$$\nabla g \times \mathbf{N} = [16z - 24y, -4z + 12x, -8y + 16x].$$

Betingelse (4) gir oss da 3 ligninger men bare 2 av dem er uavhengige:

$$z = 3x \tag{5}$$

$$y = 2x. \tag{6}$$

Det er lett å sjekke at alle punktene som tilfredstiller (5) og (6) tilfredstiller både (3) og $g(x, y, z) = 0$. Det vil si at alle disse punktene, som dessuten utgjør en rett linje, har det samme tangentplanet som P.

Oppgave 2

a) Maksima og Minima som ligger inne i området er kritiske punkter, det vil si punkter hvor $\nabla f = 0$. Vi har:

$$\nabla f(x,y) = [(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}, -2xye^{-x^2-y^2}]$$

Kritiske punkter tilfredstiller altså

$$1-2x^2 = 0, \ -2xy = 0$$

og derfor

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \ y = 0.$$

Her må vi se på to tilfeller:

- $R \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Da finnes det ingen kritiske punkter i området, og maksima og minima ligger på randen. Vi parametriser randen ved å skrive $[x,y] = [R\cos(\theta), R\sin(\theta)]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. På randen er f lik $g(\theta) = R\cos(\theta)e^{-R^2}$. Vi får maksimum og minimim til g når vi tar $\theta = 0$ og $\theta = \pi$. Maksimum og minimum er nådd i punktene [R,0] og [-R,0] og vi har

$$f_{\max} = Re^{-R^2}, \ f_{\min} = -Re^{-R^2}.$$

- $R > \frac{1}{\sqrt{2}}$. De to kritiske punktene $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$ og $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$ ligger inne i området. De gir forholdvis $f = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ og $f = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$. Vi må undersøke randen. Vi gjør det på den samme måten som før, og maksimum og minimum på randen finnes i punktene [R,0] og [-R,0]. For å finne maksimum og minimum verdier, må vi sammeligne verdien til f i disse punktene med den i de kritiske punktene. Vi merker at alle disse punktene ligger på den horizontale aksen og derfor er det nok å betrakte restriksjonen til f til x-aksen: $h(x) = xe^{-x^2}$. Vi har

$$h'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}.$$

Når $x > 1/\sqrt{2}$, $h'(x) < 0$ og h er en avtagende funksjon. Av dette følger at $h(R) < h(\frac{1}{\sqrt{2}})$ og f er derfor maksimal i punktet $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$. På den samme måten får vi at f er minimal i punktet $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$, og

$$f_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}, \ f_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}.$$

b) I dette tilfellet er maksimum og minimum til f nådd enten i de kritiske punktene eller når x, y går mot $\pm\infty$. Siden vi har $\lim_{(x,y)\to\pm\infty} f(x,y) = 0$, tar funksjonen sine maksimale og minimale verdier forholdvis i $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$ og $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$, og

$$f_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}, \ f_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}.$$

Oppgave 3

a) Vi kaller f potentialfunksjonen til $\mathbf{F}$. Den tilfredstiller

$$f_x = 2z(x+y) \tag{7}$$
$$f_y = 2xz \tag{8}$$
$$f_z = x^2 + 2xy + z \tag{9}$$

Ved å intetgrere (7) får vi

$$f(x,y,z) = zx^2 + 2zyx + h(y,z) \tag{10}$$

hvor h er en ukjent funksjon som er uavhengig av x. Vi deriverer f med hensyn på y:

$$f_y(x,y,z) = 2zx + h_y(y,z),$$

og setter resultatet inn i (8). Vi får $h_y = 0$. Det vil si at h er uavhengig av y, i.e., $h(y,z) = h(z)$. Vi deriverer (10) med hensyn på z:

$$f_z(x,y,z) = x^2 + 2yx + h_z(z)$$

og setter resultatet inn i (9). Vi får $h_z(z) = z$ som gir $h(z) = \frac{1}{2}z^2$ (+ en konstant). Til slutt har vi

$$f(x,y,z) = zx^2 + 2xyz + \frac{1}{2}z^2.$$

b) Vi vil beregne arbeidet av $\mathbf{F}$ langs C. Siden $\mathbf{F}$ har en potentialfunksjon f vet vi at arbeidet kan uttrykkes slik

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = f(b) - f(a) \tag{11}$$

hvor a og b er de to endepunktene til C. I vår tilfellet, har vi

$$\begin{aligned} b &= \mathbf{r}(\pi) = [1, 1, 1], \\ a &= \mathbf{r}(0) = [1, 0, 1], \end{aligned}$$

og

$$f(b) = \frac{7}{2}, \; f(a) = \frac{3}{2}.$$

Derfor, fra (11), får vi at

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = 2.$$

Oppgave 4

a) Buelengden av C er gitt ved

$$S = \int_C ds = \int_{1/2}^{2} |\mathbf{v}(t)| \; dt.$$

Vi deriverer $\mathbf{r}$ og får

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = [-\frac{1}{t^2}, \sqrt{2}, t^2].$$

Vi beregner lengden av $\mathbf{v}$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}(t)| &= \sqrt{\frac{1}{t^4} + 2 + t^4} \\ &= \frac{\sqrt{(1+t^4)^2}}{t^2} \\ &= \frac{1}{t^2} + t^2. \end{aligned}$$

Da får vi

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{2} |\mathbf{v}(t)| \; dt &= \int_{1/2}^{2} \left(\frac{1}{t^2} + t^2 \right) \; dt \\ &= \left[-\frac{1}{t} + \frac{t^3}{3} \right]_{1/2}^{2} \\ &= \frac{33}{8}. \end{aligned}$$

Buelengden av C er $\frac{33}{8}$.

b) Enhetstangentvektoren $\mathbf{T}$ er gitt ved

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Vi har allerede beregnet $\mathbf{v}$ og $|\mathbf{v}|$ i a) og vi får

$$\mathbf{T}(t) = \frac{t^2}{1+t^4}[-\frac{1}{t^2}, \sqrt{2}, t^2].$$

I formelliste står det at

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\mathbf{N}(t). \tag{12}$$

Ved å ta kryssprodukt av (12) med $\mathbf{T}$ får vi

$$\mathbf{a} \times \mathbf{T} = \kappa v^2 \mathbf{N} \times \mathbf{T} \tag{13}$$

fordi $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = 0$. Siden $\mathbf{N}$ og $\mathbf{T}$ er enhetsvektorer, har vi $|\mathbf{N} \times \mathbf{T}| = 1$. Vi tar lengden på begge sider i (13) og får

$$\kappa = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{T}|}{v^2}.$$

Vi beregner $\mathbf{a}(t)$,

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = [\frac{2}{t^3}, 0, 2t].$$

Vi setter inn $t = 1$ og får $\mathbf{a}(1) = [2, 0, 2]$. Vi har $\mathbf{T}(1) = [-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}]$. Derfor,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{T} = [-\sqrt{2}, -2, \sqrt{2}]$$

og

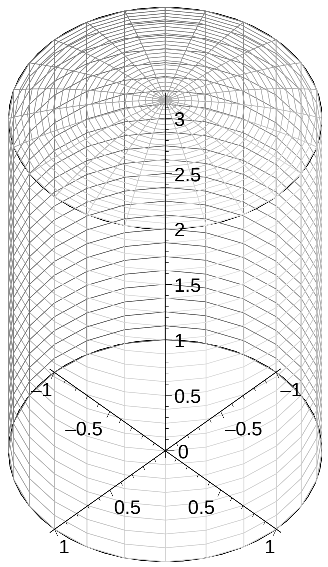
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{T}| = 2\sqrt{2}.$$

Av dette følger, siden $v(1) = |\mathbf{v}(1)| = 2$,

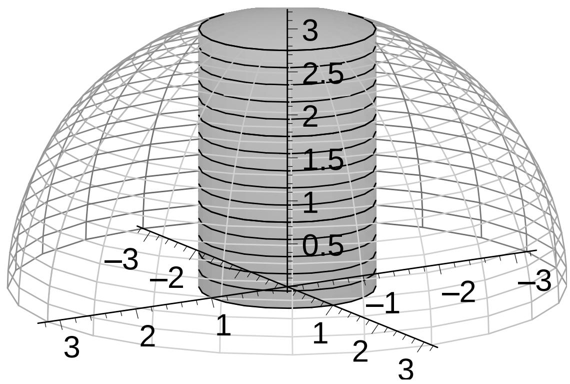
$$\kappa(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Oppgave 5

a) T er begrenset av kulen $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ på toppen, xy-planen i bunnen og sylinderen $x^2 + y^2 = 1$ på sideflaten.



Legemet T



halvkulet og T

Vi kaller tyngdepunkets koordinater for $[x_G, y_G, z_G]$. På grunn av symmetri,

$$x_G = 0,\ y_G = 0.$$

Den siste komponenten z_G er gitt ved

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_T z\delta \, dV$$

hvor δ er tetthet og $M = \iiint_T \delta \, dV$. Vi bruker sylinderkoordinater og får

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_T r \, dz d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{10-r^2}} r \, dz d\theta dr \\
&= 2\pi \int_0^1 r\sqrt{10 - r^2} \, dr \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{3} \left(10 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\
&= \frac{2\pi}{3}(10^{3/2} - 27)
\end{aligned}$$

og

$$\iiint_T z\delta\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{10-r^2}} zr\, dzdrd\theta$$
$$= 2\pi \int_0^1 \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\sqrt{10-r^2}} r\, dr$$
$$= \pi \int_0^1 (10-r^2)r\, dr$$
$$= \pi \left[5r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^1$$
$$= \frac{19\pi}{4}.$$

Til slutt får vi

$$z_G = \frac{57}{8(10^{3/2}-27)}.$$

b) Vi setter $x^2+y^2=1$ inn i $x^2+y^2+z^2=10$ og får $z^2=9$ som gir $z=3$ siden $z>0$. Derfor ligger C i planen $z=3$ og den er en sirkel. Vi bruker Stokes's teorem:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\, ds = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\, dS.$$

Her er S disken gitt ved $x^2+y^2\le 1$ og $z=3$. Enhetnormalvektoren $\mathbf{n}$ er $[0,0,1]$. Vi beregner $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ og finner

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = [y, -x, 2x+2].$$

Derfor,

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_S (2x+2)\, dS$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2r\cos(\theta)+2)r\, drd\theta \quad \text{(Vi bruker polarkoordinater)}$$
$$= \int_0^1 [2r\sin(\theta)+2\theta]_0^{2\pi}\, r\, dr$$
$$= 4\pi \int_0^1 r\, dr$$
$$= 2\pi.$$

Til slutt får vi

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 2\pi$$

Oppgave 6 Området er gitt ved

$$0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}, \; 0 \leq \theta \leq 1.$$

Arealet A er gitt ved

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}} r\, dr d\theta \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+\theta^2}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\arctan(\theta)\right]_0^1 . \end{aligned}$$

Det vil si

$$A = \frac{\pi}{8}.$$