Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN I TMA4105 MATEMATIKK 2, 25.05.2007

Oppgave 1. Den retningseriverte er størst i retningen til gradienten. Vi regner ut gradienten til f,

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathbf{i} + 2ze^{yz}\mathbf{j} + 2ye^{yz}\mathbf{k}.$$

Spesielt er $\nabla f(\pi,0,1) = 2\mathbf{j}$. Den retningsderiverte er gitt ved $D_{\mathbf{u}}(x,y,z) = \mathbf{u}\cdot\nabla f(x,y,z)$ og er størst når $\mathbf{u}$ er parallell med $\nabla f(x,y,z)$, det vil si $\underline{\mathbf{u} = \mathbf{j}}$, og $D_{\mathbf{u}}(\pi,0,1) = |\nabla f(\pi,0,1)| = \underline{2}$.

Oppgave 2a. De kritiske punktene til f er de punktene der de partiell-deriverte er 0. Vi løser likningene $f_x(x,y) = 0$ og $f_y(x,y) = 0$ og får

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1+x^2+y^2-x\cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ f_y &= \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Den andre likninga impliserer $x = 0$ eller $y = 0$. Setter vi inn $x = 0$ i den første likninga gir får vi $1 + y^2 = 0$ som er umulig, og setter vi inn $y = 0$ får vi $1 - x^2 = 0$, det vil si $x = \pm 1$. Vi har to kritiske punkter, $\underline{(x,y) = (-1,0)}$ og $\underline{(x,y) = (1,0)}$.

På randa er $f(x,y) = \frac{x}{1+9} = \frac{x}{10}$, som har minste verdi når $x = -3$ og største verdi når $x = 3$. Verdiene er da henholdsvis lik $\underline{\frac{-3}{10}}$ og $\underline{\frac{3}{10}}$.

Alternativ løsning: For å finne minimum og maksimum på randa $g(x,y) := x^2 + y^2 - 9 = 0$ må vi løse systemet

$$\begin{aligned} g(x,y) &= 0 \\ f_x(x,y) &= \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) &= \lambda g_y(x,y), \end{aligned}$$

det vil si

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9 \\ \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} &= 2\lambda x \\ \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} &= 2\lambda y. \end{aligned}$$

Vi kan bruke $y^2 = 9 - x^2$ og gange opp med $(1 + x^2 + y^2)^2 = 100$ i de to siste likningene, og da får vi

$$\begin{aligned} 5 - x^2 &= 100\lambda x \\ -xy &= 100\lambda y \end{aligned}$$

etter forkorting av tallet 2. Den siste likninga gir $y = 0$ eller $100\lambda = -x$. Hvis $y = 0$ gir $x^2 + y^2 = 9$ at $x = \pm 3$, mens hvis $100\lambda = -x$ gir den nest siste likninga at $5 - x^2 = -x^2$, som er umulig (Det impliserer at $5 = 0$).

For å finne minimum og maksimum må vi sjekke 4 punkter, $(x, y) = (-1, 0)$, $(x, y) = (1, 0)$, $(x, y) = (-3, 0)$ og $(x, y) = (3, 0)$. Ved innsetting ser vi at $f(-1, 0) = \underline{-\frac{1}{2}}$ er minimum og $f(1, 0) = \underline{\frac{1}{2}}$ er maksimum, siden $f(\pm 3, 0) = \pm\frac{1}{10}$.

Oppgave 2b. På randa til A_r er $f(x, y) = \frac{x}{1+r^2}$, så $f(x, y)$ har minste verdi når $x = -r$ og største verdi når $x = r$.

(Alternativ løsning: For å finne minimum og maksimum for $f(x, y)$ på A_r må vi finne minimum og maksimum på randa. Det vil si at vi må løse systemet

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ \frac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} &= 2\lambda x \\ \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} &= 2\lambda y. \end{aligned}$$

Ved å bruke $y^2 = r^2 - x^2$ og gange opp med $(1 + x^2 + y^2)^2 = (1 + r^2)^2$ får vi at $y = 0$ eller $(1+r^2)^2\lambda = -x$. Nå impliserer $y = 0$ at $x = \pm r$, mens $(1+r^2)^2\lambda = -x$ gir $\frac{1}{2}(1+r^2) - x^2 = -x^2$, som er umulig.)

For hver r må vi sjekke punktene $(\pm r, 0)$ og, hvis $r > 1$, de indre kritiske punktene $(\pm 1, 0)$. Siden $f(r, 0) > f(-r, 0)$ er $\underline{f(r, 0) = \frac{r}{1+r^2} \text{ maksimum for alle } r \leq 1, \text{ og } f(-r, 0) = \frac{-r}{1+r^2} \text{ minimum for alle } r \leq 1}$. La $h(x) = f(x, 0) = \frac{x}{1+x^2}$. Da er $h'(x) = f_x(x, 0) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. For $|x| \geq 1$ er $h'(x) < 0$, så h er synkende der.

Siden $h(x)$ er synkende for $|x| > 1$ vet vi at for $f(r, 0) < f(1, 0)$ og $f(-r, 0) > f(-1, 0)$ for alle $r > 1$. Vi ser også at $f(-r, 0) < 0 < f(r, 0)$ for alle $r > 0$. Dette gir $f(-1, 0) < f(-r, 0) < 0 < f(r, 0) < f(1, 0)$ for alle $r > 1$, så $(1, 0)$ og $(-1, 0)$ er absolutt maksimums og minimumspunkt i A_r for alle $r > 1$.

Siden ethvert punkt (x, y) i $\mathbb{R}^2$ ligger inne i en A_r, for en tilstrekkelig stor r, må $f(x, y) \leq f(1, 0)$ for alle punkter (x, y) og derved har f absolutt $\underline{\text{minimum i } f(-1, 0) = -\frac{1}{2} \text{ og maksimum i } f(1, 0) = \frac{1}{2}}$.

Oppgave 3.

Vektorplott	Vektorfelt
I	**K**
II	**H**
III	$\times$
IV	**G**

Oppgave 4. Området beskrives lettest ved kulekoordinater, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ og $0 \leq \rho \leq 2 + \cos\varphi$. Volumet er

$$\begin{aligned} V &= \iiint_T dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2+\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_{\rho=0}^{2+\cos\varphi} \sin\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos\varphi)^3 \sin\varphi \, d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{1}{4}(2+\cos\varphi)^4\right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6}(3^4 - 2^4) = \underline{\frac{65\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Oppgave 5. Siden $\operatorname{curl} \mathbf{F} = (-\frac{\partial}{\partial x}(\sin(y^2)) + \frac{\partial}{\partial y}(\sin x))\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$ er integralet uavhengig av vei. Derfor kan vi velge en annen parameterisering fra $(0,0)$ til $(1,0)$, nemlig den der $x = t$ og $y = 0$. Dette gir $dx = dt$ og $dy = 0$, og vi kan regne ut integralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_0^1 \sin t \, dt = \big[-\cos t\big]_{t=0}^{1} = \underline{1 - \cos 1}.$$

Oppgave 6a. I skjæringa mellom flatene er $z^2 = (r-1)^2$. Dette gir $(r-1)^2 + (r-2)^2 = 1$ som gir to løsninger, $r = 1$ og $r = 2$. Disse radiene gir henholdsvis $z = 0$ og $z = 1$, så $r = 1$ og $r = 2$ svarer til indre og ytre radius for projeksjonen til xy-planet: $\underline{1 \leq r \leq 2}$. Området T kan beskrives ved ulikhetene

$$T: \; r - 1 \leq z \leq \sqrt{1-(r-2)^2}, \; 1 \leq r \leq 2, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

og integralet kan derfor uttrykkes som et iterert integral

$$\begin{aligned} I &= \iiint_T z \, dV = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_{r-1}^{\sqrt{1-(r-2)^2}} zr \, dz \, d\theta \, dr \\ &= \pi \int_1^2 (1 - (r-2)^2 - (r-1)^2) r \, dr = \pi \int_1^2 (-4r + 6r^2 - 2r^3) \, dr \\ &= \pi \left[-2r^2 + 2r^3 - \frac{1}{2}r^4\right]_{r=1}^{2} = \underline{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Oppgave 6b. Kjegla er en graf $z = \sqrt{x^2+y^2} - 1$, og vi regner ut $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ og $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Normalvektoren $\mathbf{N} = \langle -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\rangle$ peker oppover, og fluksen blir

$$\begin{aligned}
\Phi_{S_1} &= \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_R \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dx\,dy \\
&= \iint_R -\frac{x(xz-y)+y(yz+x)}{\sqrt{x^2+y^2}} + x^2+y^2\,dx\,dy \\
&= \iint_R -\frac{x^2z+y^2z}{\sqrt{x^2+y^2}} + x^2+y^2\,dx\,dy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(-\frac{r^2(r-1)}{r} + r^2\right) r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\,dr\,d\theta = 2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=1}^2 = \underline{\frac{14\pi}{3}}.
\end{aligned}$$

Oppgave 6c. Siden $\mathbf{n}$ i oppgaven over peker oppover, det vil si *inn i* T, gir divergensteoremet at

$$\Phi_{S_2} - \Phi_{S_1} = \iiint_T \operatorname{div} F\,dV = \iiint_T 2z\,dV = 2I = \pi,$$

hvor I er som i del (a). Dette gir

$$\Phi_{S_2} = \Phi_{S_1} + \iiint_T \operatorname{div} F\,dV = \frac{14\pi}{3} + \pi = \underline{\frac{17\pi}{3}}.$$