

4.3 Ting å se på:

Basis, standard basis, dimensjon, basis for $\text{Null}(A)$.

4.4 Ting å se på:

Radrom $(\text{Row}(A))$
 Kolonnerom $(\text{Col}(A))$
 Rang $(\text{rank}(A))$

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Row}(A)) = \dim(\text{Col}(A))$$

$$\text{rank}(A) + \dim \text{Null}(A) = n$$

antall kolonner i A

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Finn en basis for hvert av rommene $\text{Null}(A)$, $\text{Col}(A)$ og $\text{Row}(A)$

Løsning:

A er radekvivalent med matrisa

$$\begin{array}{c} \text{Redusert} \rightarrow \\ \text{trappeform} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Ledende 1-ere} \\ \text{i kolonne 1, 3 og 5} \end{array}$$

Løsning av $Ax=0$ er

$$x = s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{v_1} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{v_2} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Basis for $\text{Null}(A)$: v_1, v_2

Basis for $\text{Col}(A)$ er kolonne 1, 3 og 5
 i A (kolonner med ledende 1-ere):

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Basis for $\text{Row}(A)$ er de ikke-null radene i trappematrisa: $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Noen oppgaver med kolonner

(også kalt søylerom)

Oppgave

La $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ hvor

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

og la $W = \text{span}(S) = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$

Finne en basis for W med basisvektorer fra S .

Løsning

Skriver vektorene som kolonner i en matrise og finner en basis for kolonnerområdet. ($\text{span}(S) = \text{col}(A)$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

radoperasjoner $\rightarrow$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ser at ledende elementer er i kolonne 1 og kolonne 2.

Derfor danner kolonne 1 og kolonne 2 i A en basis for $\text{Col}(A) = \text{span}(S)$.

Så $\{v_1, v_2\}$ er en basis for W .

Oppgave

Finne en basis for $\mathbb{R}^3$ som inneholder $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Løsning

Vi vet at $\{v_1, v_2, e_1, e_2, e_3\}$ genererer $\mathbb{R}^3$.

Braker metoden i forrige oppgave til å finne en basis blant disse elementene (må skrive v_1, v_2 først for å være sikker på at de blir med i basisen)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

radop.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ledende element i kolonne 1, 2, 4 så basis er $\{v_1, v_2, e_2\}$