4.1 Ting å se på:

Vektorrom, underrom

Løsningsrommet til $A\underline{x} = \underline{0}$

(Dette blir senere kalt nullrommet til A, notasjon: $\mathrm{Nul}(A)$)

4.2 Ting å se på:

Lineærkombinasjon, vektorrom utspent av en mengde vektorer, lineær avhengighet / uavhengighet.

Eks

La $\underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\underline{v_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$

Er $\underline{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$ en lineærkombinasjon av $\underline{v_1}$ og $\underline{v_2}$?

Prøver $\underline{w} = c_1 \underline{v_1} + c_2 \underline{v_2}$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Får ligningsystemet

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 &= 2 \\ -2c_1 - 5c_2 &= -6 \\ -c_1 + 4c_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & -6 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[2 \cdot R_1 + R_3]{2 \cdot R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-7R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 19 \end{bmatrix} \qquad 0c_1 + 0c_2 = 19$$

Umulig, så svaret er nei.

Eks

La $\underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{v_2} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\underline{v_3} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Er $\underline{w} = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$ en linearkombinasjon av $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$?

Prøver $\underline{w} = c_1 \underline{v_1} + c_2 \underline{v_3} + c_3 \underline{v_3}$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Får ligningsystemet

$$\begin{aligned} c_1 - 4c_2 - 3c_3 &= -7 \\ 2c_1 - c_2 + c_3 &= 7 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_3]{-2R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 & -7 \\ 0 & 7 & 7 & 21 \\ 0 & 6 & 6 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}R_2} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{-6R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{4R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Her er c_3 en fri variabel.

$c_3 = t$, $c_1 = -t + 5$, $c_2 = -t + 3$

Så $\underline{w}$ kan skrives som en linearkombinasjon av $\underline{v_1}, \underline{v_3}, \underline{v_3}$ på uendelig mange måter.

Eks $(t = 0)$ $\quad \underline{w} = 3\underline{v_1} + 5\underline{v_3}$

$(t = 1)$ $\quad \underline{w} = 2\underline{v_1} + 4\underline{v_2} + \underline{v_3}$

o.s.v.

Eks $\quad \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix}, \underline{v_4} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

Er $S = \{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}, \underline{v_4}\}$ en lineært uavhengig mengde?

$$c_1 \underline{v_1} + c_2 \underline{v_2} + c_3 \underline{v_3} + c_4 \underline{v_4} = \underline{0}$$

$$\begin{aligned} 2c_1 + 5c_2 + 3c_3 + 2c_4 &= 0 \\ c_1 - 2c_2 + 8c_3 + 7c_4 &= 0 \\ 3c_1 + 4c_2 - 6c_3 + 4c_4 &= 0 \end{aligned}$$

Vi får færre ligninger enn ukjente
Derfor fins det uendelig mange løsninger.

Generelt: I $\mathbb{R}^n$ kan en lineært uavhengig mengde ha maks n elementer.

Teorem

En mengde $S = \{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_k}\}$ er lineært avhengig hvis og bare hvis en av vektorene kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre.

Teorem

La $S = \{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}\}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$.
La A være $n \times n$-matrisa

$$A = [\underline{v_1}\ \underline{v_2} \cdots \underline{v_n}]$$

Da er S en lineært uavhengig mengde hvis og bare hvis $\det A \neq 0$.

Eks $\quad \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, så $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$ er lineært uavhengige