

Oppgave

Finn en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$ som inneholder vektoren

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Løsning

Strategi: Finner først en vanlig basis som i et tidligere eksempel.

Bruker så Gram-Schmidt på denne og vi får en ortogonal basis.

Mengden $\{u_1, e_1, e_2, e_3\}$ utspenner $\mathbb{R}^3$. Finner en basis blandt disse vektorene.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{radopsjon}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{col}(A) = \mathbb{R}^3$$

Vi har ledende

element i 1., 2. og 3. kolonne, så

$\{u_1, e_1, e_2\}$ er en basis

Vi bruker Gram-Schmidt på denne basen.

$$\text{Velger } u_1 = \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = e_1 - \frac{u_1 \cdot e_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Kan velge } u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = e_2 - \frac{u_1 \cdot e_2}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{u_2 \cdot e_2}{u_2 \cdot u_2} u_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Kan velge } u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ortogonal basis for V som inneholder u_1 :

$$\left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$