Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

EKSAMEN I TMA4110 MATEMATIKK 3
Bokmål
Onsdag 20. desember 2011

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1 Løs ligningen $z^2 + 4z + 4 + 2i = 0$. Svaret skal skrives på formen $z = x + iy$.

Oppgave 2 En dempet tvungen svingning er beskrevet ved differensialligningen

$$y''(t) + 4y'(t) + 64y(t) = \cos \omega t.$$

a) Bestem om bevegelsen er underdempet, overdempet eller om det er kritisk demping. Skisser (uten utregning) en løsning til den homogene ligningen med initialbetingelser $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

b) Vis at $y_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ er en partikulær løsning av ligningen når

$$A = \frac{64 - \omega^2}{(64 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}, \ B = \frac{4\omega}{(64 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}.$$

c) Sett $C = \max y_p(t)$. For hvilken verdi av ω blir C størst? (Du kan bruke uten bevis at $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.)

Oppgave 3

a) Finn generell løsning til ligningen

$$y'' + 2y' - 3y = 9t^2.$$

b) Finn en partikulær løsning til ligningen

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{t}, \ t > 0.$$

Oppgave 4 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en basis for nullrommet Null(A) og en basis for kolonnerommet (søylerommet) Col(A). Hva er rang(A)?

b) For hvilke verdier av a er $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$ i Col(A)?

c) La T være en lineær transformasjon med standardmatrise A. Avgjør om hver påstand under er sann eller usann (svarene skal begrunnes)

(1) T er en lineær transformasjon fra R^3 til R^4,

(2) T er en lineær transformasjon fra R^4 til R^3,

(3) T er på (onto),

(4) T er en-til-en (one-to-one).

Oppgave 5 Finn minste kvadraters løsning til systemet

$$\begin{array}{ccccc} x & & +z & = & 0 \\ x & +2y & +3z & = & 5 \\ x & -2y & -z & = & 1 \\ & 4y & -z & = & -1 \end{array}$$

Oppgave 6 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Vis at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ er en (kompleks) egenvektor til A. Finn de komplekse egenverdiene og egenvektorene til A.

Oppgave 7 La A være en $n \times n$ matrise slik at $A^2 = A$. Vis at enhver vektor $\mathbf{x}$ i R^n kan skrives på formen $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ der $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$ og $A\mathbf{v} = 0$.