Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Karl Kristian Brustad (98 88 37 71)

Eksamen i TMA4110/TMA4115 Matematikk 3

Bokmål
Torsdag 8. august, 2013
Tid: 09:00 – 13:00
Sensurdato: 29. august, 2013

Hjelpemidler (Kode C): Enkel, bestemt kalkulator (HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Alle svar skal begrunnes, bortsett fra i oppgave 5, og alle utregninger skal være så detaljerte at fremgangsmåten kommer klart fram. Hver av deloppgavene 1a, 1b, 2a, 2b, 3a, 3b, 4a, og 4b teller 10% hver, og deloppgavene 5a–h teller 2.5%. Det vil ikke gis delvis uttelling på deloppgavene 5a–h.

Oppgave 1 Gitt matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Skriv løsningsmengden til matriseligninga $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$ på parametrisk vektorform.

b) Finn en ortonormal basis for radrommet $\mathrm{Row}(A)$.

Oppgave 2

a) Diagonaliser matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (altså, finn en invertibel matrise P og en diagonal matrise D slik at $A = PDP^{-1}$).

b) Gjør et variabelbytte, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, som transformerer den kvadratiske formen $x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$ til en kvadratisk form uten kryssproduktledd (altså, finn en matrise B slik at om $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, så er $x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 = ay_1^2 + by_2^2$ for et passende valg av konstantene a og b).

Oppgave 3 La $y_1(t) = t$ og $y_2(t) = t\ln(t)$ være to løsninger av differensialligningen

$$t^2y'' - ty' + y = 0$$

på intervallet $(0, \infty)$.

a) Vis at mengden $\{y_1(t), y_2(t)\}$ er en fundamentalmengde av løsninger for ligningen ovenfor på intervallet $(0, \infty)$.

b) Finn den generelle løsningen av differensialligningen $t^2y'' - ty' + y = t$, der $0 < t < \infty$.

Oppgave 4

a) Matrisen $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ har tre egenverdier. En egenverdi er $-2+i$, og $\begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -2 \end{bmatrix}$ er en egenvektor som korresponderer til egenverdien $-2+i$. Finn de andre to egenverdiene og en korresponderende egenvektor til hver av desse egenverdiene.

b) Tre tanker inneholder saltvann. Tank 1 inneholder 10 liter, tank 2 inneholder 5 liter og tank 3 inneholder 10 liter. Saltvann strømmer fra tank 1 til tank 2 med en rate på 10 liter per sekund, fra tank 2 til tank 3 med en rate på 10 liter per sekund, og fra tank 3 til tank 1 med en rate på 10 liter per sekund. Anta at ved starttidspunktet er det 10 gram salt i tank 1, 6 gram salt i tank 2 og 4 gram salt i tank 3. Anta også at tankene omrøres slik at saltet i hver tank er jevnt fordelt. Hvor mye salt er det i hver av tankene etter $\pi/2$ sekund?

Oppgave 5 *Du trenger ikke å grunngi svarene dine i denne oppgaven.*

a) For hver av de følgende 4 påstandene, avgjør om den er sann eller ikke.

1. Ligningen $x_2 = x_1(2+\sqrt{2}i)$ er lineær.
2. Differensialligningen $y'' + 16y = e^{-4t} + 3\sin(4t)$ er lineær.
3. Differensialligningen $t^2y''(t) + 3ty'(t) - 3y(t) = 0$ er lineær.
4. Transformasjonen T fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ gitt ved $T(x) = x^2 + x$ er lineær.

b) For hver av de følgende 4 påstandene, avgjør om den er sann eller ikke.

1. De tre linjene $2x_1 + x_3 = 1$, $-2x_1 + x_2 = 3$ og $x_1 + x_3 = 1$ har nøyaktig ett punkt felles.
2. Dersom $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, så ligger $\mathbf{b}$ i Span$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$.
3. Dersom $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, så er Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \mathbb{R}^4$.
4. De følgende vektorene er lineært uavhengige: $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) For hver av de følgende 4 påstandene, avgjør om den er sann eller ikke.

1. Dersom A er en $m \times n$ matrise, B er en $n \times m$ matrise, og $AB = 0$, da må vi enten ha at $A = 0$ eller at $B = 0$.
2. Dersom C og D er $n \times n$-matriser, så må vi ha at $(C+D)(C-D) = C^2 - D^2$.
3. Dersom E er en invertibel matrise, så er $(2E)^{-1} = 2E^{-1}$.
4. Dersom F er en 2×2 matrise og ligningen $F\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ har én unik løsning, så må F være invertibel.

d) La A være en $n \times n$ matrise og k en skalar. For hver av de følgende 4 påstandene, avgjør om den er sann eller ikke.

1. $\det(kA) = k^n \det(A)$.
2. Dersom $\det(A) = 2$, så er $\det(A^2) = 4$.
3. $\det(A^T) = \det(A)$.
4. Dersom A er invertibel, så er $\det(A)\det(A^{-1}) = 0$.

e) La V være et vektorrom forskjellig fra null-vektorrommet, og la $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ være vektorer i V. For hver av de følgende 4 påstandene, avgjør om den er sann eller ikke.

1. Dersom $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ er lineært uavhengige, så vil $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ være en basis for V.
2. Dersom $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\} = V$, da finnes det minst en delmengde av $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ som er en basis for V.
3. Dersom $\dim(V) = p$, da kan ikke $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ være lineært uavhengige.
4. Dersom $\dim(V) = p$, da må $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ være en basis for V.

f) La A være en $n \times n$ matrise. For hver av de følgende 4 påstandene, avgjør om den er sann eller ikke.

1. Dersom A er invertibel og 1 er en egenverdi for A, da må 1 også være en egenverdi for A^{-1}.
2. Dersom $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A, da må $\mathbf{v}$ også være en egenvektor for A^2.
3. Dersom A har færre enn n distinkte egenverdier, så kan ikke A være diagonaliserbar.
4. Dersom enhver vektor i $\mathbb{R}^n$ kan skrives som en lineærkombinasjon av egenvektorer til A, da må A være diagonaliserbar.

g) La $\mathbf{v}$ og $\mathbf{u}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$ og la W være et underrom av $\mathbb{R}^n$. For hver av de følgende 4 påstandene, avgjør om den er sann eller ikke.

1. Avstanden mellom $\mathbf{v}$ og $\mathbf{u}$ er $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.
2. Dersom $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ er lineært uavhengige, da må $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være ortogonale.
3. Dersom $\mathbf{v}$ sammenfaller med sin ortogonale projeksjon inn på W, så må $\mathbf{v}$ tilhøre W.
4. Ingen vektor i $\mathbb{R}^n$ kan tilhøre både W og $W^\perp$ (det ortogonale komplementet til W).

h) La A være en $n \times n$ matrise. For hver av de følgende 4 påstandene, avgjør om den er sann eller ikke.

1. Dersom $A^T = A$ og om $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er vektorer i $\mathbb{R}^n$ slik at $A\mathbf{u} = 5\mathbf{u}$ og $A\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$, da må $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være ortogonale.
2. Dersom $A = PDP^T$ der $P^T = P^{-1}$ og D er en diagonal matrise, da må A være symmetrisk.
3. Dersom A er symmetrisk og alle egenverdiene til A er positive, da må den kvadratiske formen $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ være positiv definitt.
4. Dersom A er symmetrisk og λ er en egenverdi til A, da må dimensjonen til egenrommet til A som korresponderer til λ være lik multiplisiteten til λ som en rot i det karateristiske polynomet til A.