Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 995 59 273

EKSAMEN I TMA4110/4115 MATEMATIKK 3
Bokmål
Lørdag 18. august 2007
Kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 10. september 2007

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd. Hvert av de 12 punktene (1, 2abc, 3ab, 4ab, 5ab, 6, 7) teller i utgangspunktet likt ved sensuren.

Oppgave 1 Bruk polarform $z = re^{i\theta}$ til å finne løsningene av ligningen

$$z^3 - 5\bar{z} = 0.$$

Oppgave 2

a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$$

b) Finn en generell løsning av differensialligningen

$$y'' + y' - 12y = 7e^{-4x}.$$

c) Finn en partikulær løsning av differensialligningen

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = x^2, \qquad x > 0.$$

Oppgave 3

a) Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

b) La 3×4–matrisen A være gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Finn en basis for hvert av rommene $\mathrm{Row}(A)$, $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Null}(A)$ og $\mathrm{Col}(A)^{\perp}$.

Oppgave 4

a) En kvadratisk 3×3–matrise A er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

For hvilke reelle tall a er matrisen A inverterbar?

b) Finn A^{-1} når $a = 1$.

Oppgave 5

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

Angi en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

b) I et storbyområde med konstant totalt innbyggertall bor det nå 7 millioner i sentrum og 5 milllioner i forstedene. Hvert år flytter 20 % av innbyggerne i sentrum til forstedene (og 80 % forblir i sentrum), mens 10 % av de som bor i forstedene flytter inn til sentrum (og 90 % forblir i forstedene).

Hva blir, på lang sikt, fordelingen av innbyggere mellom sentrum og forsteder?

Oppgave 6 Det oppgis at 1 og 3 er egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

La $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ og $x_3 = x_3(t)$ være deriverbare funksjoner av t. Løs differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_3' &= 3x_3 \end{aligned}$$

med initialbetingelser $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_3(0) = 1$.

Oppgave 7 La A være en $m \times n$–matrise og B en $n \times p$–matrise slik at $AB = \mathit{0}$. Gjør rede for at $\mathrm{Col}(B)$ er inneholdt i $\mathrm{Null}(A)$, og vis at

$$\mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(B) \leq n.$$