Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 995 59 273
Eugenia Malinnikova tlf. 73 55 02 57
Hans Jakob Rivertz tlf. 938 32 172

EKSAMEN I TMA4115 MATEMATIKK 3

Bokmål
Mandag 21. mai 2007
Kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 11. juni 2007

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd. Hvert bokstavpunkt og oppgavene 1 og 7 teller i utgangspunktet likt ved sensuren.

Oppgave 1

Vis på en figur alle komplekse tall z slik at

$$|z| = |z+1|.$$

Finn løsningene til ligningen

$$z^4 = (z+1)^4.$$

Oppgave 2

a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 3.$$

b) Finn en generell løsning av differensialligningen

$$y'' + 2y' + y = x + 2e^{-x}.$$

Oppgave 3

a) Finn en partikulær løsning av differensialligningen

$$x^2y'' - 4xy' + 4y = x^4, \quad x > 0.$$

b) Finn en generell løsning av differensialligningen

$$(y'' + 4y)'' = y'' + 4y.$$

Oppgave 4

Gitt matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ og vektoren $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) Løs ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b) Finn en basis for $\mathrm{Null}(A)$, $\mathrm{Col}(A)$ og $\mathrm{Row}(A)$.

Oppgave 5

La vektorene $(1, 0, 1, -1)$, $(-1, 1, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 1)$ være en basis for et underrom V i $\mathbb{R}^4$.

a) Bruk Gram-Schmidts algoritme til å finne en ortogonal basis for V.

b) Finn den ortogonale projeksjonen av $(1, 1, 3, 4)$ inn i V.

Oppgave 6

a) Vis at matrisen $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ har egenverdiene 0, -1 og -2.

Finn en matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

b) Finn den løsningen $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ av differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2' &= -x_1 - 3x_2 + x_3 \\ x_3' &= -x_1 - 3x_2 + x_3 \end{aligned}$$

som oppfyller $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$, $x_3(0) = 2$.

Oppgave 7

La A og B være $m \times n$–matriser, og la C være en matrise slik at $A = BC$. Vis at $\mathrm{Col}(A)$ er inneholdt i $\mathrm{Col}(B)$. Vis også at hvis C er inverterbar, så er rangen til A lik rangen til B.