2. ordens lineære ODE

(1) $\quad y'' + py' + qy = r$

(2) $\quad y'' + py' + qy = 0 \quad$ homogen

Sekt. 2.1

Teorem 2.1.1 Hvis y_1 og y_2 er løsninger av (2) så er også $C_1 y_1 + C_2 y_2$ løsning av (2)

Variasjon av konstanten (I)

Anta y_1 er løsning av (2).
Sett inn $y(x) = u(x)\, y_1(x)$ i (2)
Får ny likning:

$$u'' y_1 + u'(2y_1' + py_1) = 0$$

Finn først u', deretter u og tilslutt y.

2.2. Homogene likninger, konstante koeffisienter

(3) $y'' + ay' + by = 0$

Se på den karakteristiske likning:

(4) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

i) (4) har to reelle løsninger $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Løsning blir

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

ii) (4) har en reell løsning $\lambda_1 = \lambda_2$

Løsning blir

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$$

iii) (4) har to imaginære løsninger

$\lambda = \alpha \pm i\omega$

Løsning blir

$$y(x) = (C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x) e^{\alpha x}$$

2.4 Frie svingninger

a) Uten demping:

$$my'' + ky = 0$$

Svarer til 2.2. alt iii) med $\alpha = 0$ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

b) Med demping

$$my'' + cy' + ky = 0$$

i) $c^2 > 4mk$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ overdemping

ii) $c^2 = 4mk$ $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ kritisk demping

iii) $c^2 < 4mk$ $\lambda = \alpha \pm i\omega$ underdemping

2.5 Euler-Cauchy

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

prøv $y(x) = x^m$

Karakteristisk likning:

$$m^2 + (a-1)m + b = 0$$

2.6 Entydighet og eksistens.

(2) $\quad y'' + py' + qy = 0$

Teorem 1 Hvis p og q er kontinuerlige så finnes nøyaktig en løsning av (2) med $y(x_0) = K_0$ og $y'(x_0) = K_1$

Teorem 4 Hvis y_1 og y_2 er to ikke-proporsjonale løsninger av (2), så er en hver løsning av formen

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

$\boxed{W(x)}$

2.7 Ikke-homogene likninger

(1) $\quad y'' + py' + qy = r$

Teorem Den generelle løsningen av (1) er av formen

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

der

y_p er en partikulær løsning av (1) og

y_h er den generelle løsning av (2)

Ubestemte koeffisienters metode (gjette metoden) for å finne y_p.

(3) $y'' + ay' + by = r$

a, b konstanter

(4) $y'' + ay' + by = 0$

i) Prøv $y_p(x)$ av samme form som $r(x)$

ii) Hvis r er løsning av (4) prøv

$$y_p(x) = x\,(\text{noe av samme form som } r(x))$$

2.8 Tvungne svingninger

i) Uten demping:

$$y'' + y = \cos\omega t \quad \text{gir}$$

$$y_p(t) = \frac{1}{1-\omega^2}\cos\omega t \quad \text{når } |\omega| \neq 1$$

$$= \frac{t}{2}\sin t \quad \text{når } \omega = \pm 1$$

ii) Med demping

$$y'' + cy' + y = \cos\omega t$$

$$y_p(t) = C\cdot\cos(\omega t - \eta) \qquad C = \left[(1-\omega^2)^2 + \omega^2 c^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$C_{maks} = \frac{2}{c}(4-c^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{for } \omega = (1-\tfrac{1}{2}c^2)^{\frac{1}{2}}$$

For c liten er $C_{maks} \approx \frac{1}{c}$ og $\omega \approx 1 - \frac{1}{4}c^2$

2.10 Variasjon av konstantene II

Anta y_1 og y_2 er to ikke-proporsjonale løsninger av (2). Ønsker løsning av (1) på formen

(5) $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$

Ønsker dessuten at

(6) $u'y_1 + v'y_2 = 0$

(5)+(6) innsatt i (1) gir da

(7) $u'y_1' + v'y_2' = r$

(6)+(7) gir

$$u' = \frac{-y_2 r}{W} \qquad v' = \frac{y_1 r}{W} \qquad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Finn u og v, sett så inn i (5).

Generell løsning: $y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

Mye regning, prøv gjettemetoden først