Oppsummering kap 5

Indre produkt: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

Lengde: $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

Cauchy-Schwarz: $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$

Trekantulikheten $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$

Ortogonalitet: $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$W^{\perp} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{v} \perp \vec{w} \text{ for alle } \vec{w} \in W\}$$

Teorem 5 $\quad Col(A^T) = Null(A)^{\perp}$

Teorem 4 (Se boka)

Teorem $\quad \dim W + \dim W^{\perp} = n$

5.2 Ortogonale projeksjoner:

Teorem 1+ La W være et underrom av $\mathbb{R}^n$.
Da kan hver $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ skrives entydig

$$\vec{u} = \vec{w}_0 + \vec{v}_0 \quad \text{der } \vec{w}_0 \in W \text{ og } \vec{v}_0 \in W^{\perp}.$$

$\vec{w}_0$ er den vektoren i W som gjør $|\vec{u} - \vec{w}|$ minst.

5.4 Ortogonale basiser og Gram-Schmidt.

Teorem 1 Anta W er et underrom av $\mathbb{R}^n$ og at $\{\vec{w}_1, \dots \vec{w}_m\}$ er en ortogonal basis for W. Hvis $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ er da den ortogonale projeksjon av $\vec{v}$ inn i W gitt ved

$$\vec{w}_0 = \left(\frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}\right)\vec{w}_1 + \dots + \left(\frac{\vec{w}_m \cdot \vec{v}}{\vec{w}_m \cdot \vec{w}_m}\right)\vec{w}_m$$

Gram-Schmidt algoritme:

Anta W er et underrom av $\mathbb{R}^n$ og $\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_m\}$ en basis for W.

Sett $W_k = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_k\}$

En ortogonal basis for W konstrueres som følger:

1) Sett $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$

2) Sett $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \underbrace{\frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1}_{\text{proj. av } \vec{v}_2 \text{ inn i } W_1}$

3) Gitt $\vec{u}_1, \dots \vec{u}_k$

Sett $\vec{u}_{k+1} = \vec{v}_{k+1} - \underbrace{\left[\left(\frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_{k+1}}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\right)\vec{u}_1 + \dots + \left(\frac{\vec{u}_k \cdot \vec{v}_{k+1}}{\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k}\right)\vec{u}_k\right]}_{\text{proj av } \vec{v}_{k+1} \text{ inn i } W_k}$

Merk $W_k = \text{span}\{\vec{u}_1, \dots \vec{u}_k\}$

5.2 Minste kvadraters metode

La A være $m \times n$ - matrise

Minste kvadraters løsning av

(*) $A\vec{x} = \vec{b}$ er gitt ved

(**) $A^T A \vec{x}_0 = A^T \vec{b}$

Løsningen $\vec{x}_0$ av (**) er den som gir $|A\vec{x} - \vec{b}|$ minst.

<u>Teorem 2</u> Hvis rank $A = n$ så er $\det(A^T A) \neq 0$, dvs (**) har entydig løsning.