Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Eugenia Malinnikova tlf. 73 55 02 57 / 470 55 678
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68 / 995 59 273

EKSAMEN I TMA4110 MATEMATIKK 3

Bokmål
Mandag 3. desember 2007
Kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 3. januar 2008

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd. Hvert av de 12 punktene (1, 2abc, 3, 4, 5, 6abc, 7ab) teller i utgangspunktet likt ved sensuren.

Oppgave 1 Skriv det komplekse tallet $iz(\bar{z})^{-1}$ på polarform når $z = re^{i\theta}$ og $z \neq 0$. Vis på en figur alle løsninger av ligningen $iz = \bar{z}$.

Oppgave 2

a) Ligningen

$$y'' + ay' + by = 0$$

med konstante koeffisienter har løsninger $y_1 = e^{(3/2)x}$ og $y_2 = e^{-(1/2)x}$. Bestem a og b.

b) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 4y' + 5y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 4.$$

c) Finn en generell løsning av ligningen

$$y'' - 2y' - 15y = e^{5x} - 17\cos 3x.$$

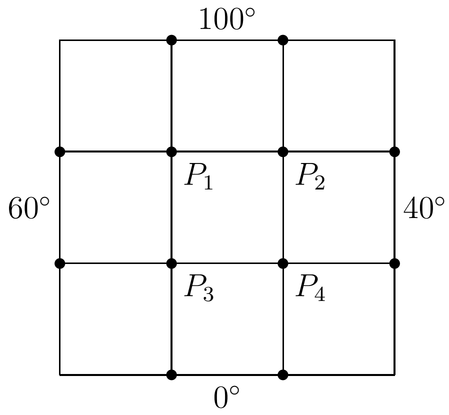
Oppgave 3 Ligningen

$$y'' + 2(\tan x)y' - y = 0$$

har en løsning $y_1(x) = \sin x$. Finn en annen løsning y_2 på formen $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ der u ikke er en konstant funksjon.

Oppgitt integral: $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{\cos x}{\sin x} - x + C.$

Oppgave 4 Vi skal bestemme temperaturene T_1, T_2, T_3, T_4 i fire punkter P_1, P_2, P_3, P_4 på en kvadratisk plate, se figuren til høyre. Temperaturen langs kantene av platen er vist på figuren.



Sett opp, og løs, et ligningssystem for T_1, T_2, T_3, T_4 dersom vi antar at temperaturen i hvert punkt P_1 til P_4 er gjennomsnittet av temperaturen i de fire nabopunktene (til venstre, over, til høyre og under).

Oppgave 5 Anta at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^n$. Er vektorene

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

lineært avhengige eller lineært uavhengige? (Husk at svaret skal begrunnes.)

Oppgave 6

a) Finn en basis for løsningsrommet til det homogene systemet

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad &= 0 \\ x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

b) Bestem den ortogonale projeksjonen av vektoren $(1, 2, -3, 1)$ inn i underrommet $V = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ i $\mathbb{R}^4$ der $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er ortogonale vektorer gitt ved

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, -1, 2).$$

c) Finn også vektorer $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ slik at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^4$.

Oppgave 7 Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A, og skriv opp en generell løsning av differensial-ligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= 10y_1 - 9y_2 \\ y_2' &= \ \ 6y_1 - 5y_2. \end{aligned}$$

b) Angi en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.
Finn en matrise B slik at $B^2 = A$.