Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

EKSAMEN I TMA4110 MATEMATIKK 3
Bokmål
Mandag 6. juni 2011
løsningsforslag

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensur: 27. juni 2011

Oppgave 1 Finn alle komplekse løsninger av ligningen

$$z^3 = \frac{1+i}{1-i}.$$

Skriv løsningene på formen $re^{i\theta}$, og tegn løsningene i det komplekse plan.

Først skal vi regne ut høyre side og skrive den på polar form. Vi får

$$w = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{2} = i.$$

Da er $|w| = 1$ og $\theta = \mathrm{Arg} w = \pi/2$.

Nå skal vi finne løsningene til ligningen $z^3 = w$. De er gitt ved

$$z_k = e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3})}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Da får vi

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}/2 + i/2;$$
$$z_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3}/2 + i/2;$$
$$z_2 = e^{i\frac{9\pi}{6}} = -i.$$

Tegninger kommer...

Oppgave 2

a) Finn en bestemt løsning på den homogene ligningen

$$y'' - y' - 2y = 0$$

med initialbetingelser $y(0) = 3$ og $y'(0) = 0$.

Den karakteristiske ligninger blir $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, den har røtter $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = -1$. Generell løsning er $y(x) = c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$. Vi setter inn initialbetingelsene og får $c_1+c_2 = 3$ og $2c_1-c_2 = 0$, dette gir $c_1 = 1$ og $c_2 = 2$. Løsningen blir $y(t) = e^{2x} + 2e^{-x}$.

b) Finn generell løsning på ligningen

$$y'' - y' - 2y = 8\sin x + 3e^{2x}.$$

Vi bruker sumregelen for ubestemte koeffisienters metode, og ser først på $y'' - y' - 2y = 8\sin x$. Fra tabellen velger vi $y_{1p} = A\cos x + B\sin x$. Da får vi $y'_{yp} = -A\sin x + B\cos x$, og $y''_{1p} = -A\cos x - B\sin x$. Vi setter dette inn i ligningen over og får $(-A\cos x - B\sin x) - (-A\sin x + B\cos x) - 2(A\cos x + B\sin x) = 8\sin x$. Vi trekker dette sammen og får $(-3A - B)\cos x + (A - 3B)\sin x = 8\sin x$. Da ser vi at $-3A - B = 0$ og $A - 3B = 8$, og at $A = 0.8$ og $B = -2.4$, altså $y'_{p1} = 0.8\cos x - 2.4\sin x$.

Så ser vi på $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$. Fra tabellen velger vi Ce^{2x}, men dette er en løsning av den homogene ligningen, så vi bruker modifikasjonsregelen og lar $y_{2p} = Cxe^{2x}$. Da har vi $y'_{2p} = Ce^{2x} + 2Cxe^{2x}$, og $y''_{2p} = 4Ce^{2x} + 4Cxe^{2x}$. Vi setter dette inn i ligningen og får $(4Ce^{2x} + 4Cxe^{2x}) - (Ce^{2x} + 2Cxe^{2x}) - 2(Cxe^{2x}) = 3e^{2x}$. Dette gir $4C - C = 3$, så $C = 1$, altså $y_{2p} = xe^{2x}$.

Sumregelen gir da at $y_p = 0.8\cos x - 2.4\sin x + xe^{2x}$, og generell løsning for ligningen er

$$y = y_p + y_h = 0.8\cos x - 2.4\sin x + xe^{2x} + c_1e^{2x} + c_2e^{-x}.$$

Oppgave 3 La $y_1(x) = \frac{1}{x}$ og $y_2(x) = x^{\frac{1}{2}}$ for $x > 0$.

a) Vis at y_1 og y_2 er lineært uavhengige på $x > 0$.

$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{-1} & x^{1/2} \\ -x^{-2} & 1/2x^{-1/2} \end{vmatrix} = (x^{-1})(1/2x^{-1/2}) - (x^{1/2})(-x^{-2}) = 3/2x^{-3/2}$, som ikke er 0 når $x > 0$. Det følger at y_1 og y_2 er lineært uavhengig på $x > 0$.

Alternativt: Vi ser på funksjonen $y_2(x)/y_1(x) = x^{\frac{3}{2}}$. Den er ikke-konstant på $\{x > 0\}$. Da er funksjonene lineær uavhengige.

b) Finn en Euler-Cauchy ligning med $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ som generell løsning.

Euler-Cauchyligninger har generell løsning på formen $y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$. En Euler-Cauchyligning er på formen $x^2 y'' + axy' + by = 0$. Vi løser en slik ved å betrakte andregradsligningen $m^2 + (a-1)m + 1 = 0$, og da er generell løsning gitt som over med m_1 og m_2 som røtter i andregradsligningen.

Vi vil finne en andregradsligning på formen som over og som har røtter -1 og $\frac{1}{2}$, for å finne a og b. Vi har $(m-(-1))(m-\frac{1}{2}) = m^2 + \frac{1}{2}m + (-\frac{1}{2}) = m^2 + (\frac{3}{2} - 1) + (-\frac{1}{2})$, og -1 og $\frac{1}{2}$ er røtter i denne. Hvis vi setter $a = \frac{3}{2}$ og $b = -\frac{1}{2}$, blir Euler-Cauchyligningen med generell løsning som over

$$x^2 y'' + \frac{3}{2} xy' - \frac{1}{2} y = 0.$$

Oppgave 4 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 2 & 7 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & -2 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en basis for nullrommet $\mathrm{Null}(A)$ og en basis for radrommet $\mathrm{Row}(A)$.

Gausseliminasjon gir at A er radekvivalent til matrisen

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Løsningene til $Ax = 0$ blir

$$s \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og en basis for $\mathrm{Null}(A)$ er $\{\mathbf{v}_1 = (7,0,0,0,-2,1)^T,\ \mathbf{v}_2 = (-1,0,0,1,0,0)^T,\ \mathbf{v}_3 = (-4,2,1,0,0,0)^T\}$.

Radene ulik null i E gir en basis for $\mathrm{Row}(A)$, $\{\mathbf{r}_1 = (1,2,0,1,3,-1),\ \mathbf{r}_2 = (0,1,-2,0,1,2),\ \mathbf{r}_3 = (0,0,0,0,1,2).\}$

b) For hvilke verdier av a har det følgende ligningssystemet en løsning? Hvor mange løsninger har det da?

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & + & 3x_5 & - & x_6 & = & a \\
2x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 7x_5 & & & = & 1 \\
-2x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & - & 2x_5 & + & 10x_6 & = & -1 \\
x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 4x_5 & + & x_6 & = & 0
\end{array}$$

Gausseliminasjon på totalmatrisen gir

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 2 & 0 & 1 & 3 & -1 & a \\
2 & 5 & -2 & 2 & 7 & 0 & 1 \\
-2 & -3 & -2 & -2 & -2 & 10 & -1 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0
\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 2 & 0 & 1 & 3 & -1 & a \\
0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 1-2a \\
0 & 1 & -2 & 0 & 4 & 8 & -1+2a \\
0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 2 & -a
\end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 2 & 0 & 1 & 3 & -1 & a \\
0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 1-2a \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & -2+4a \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1-3a
\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 2 & 0 & 1 & 3 & -1 & a \\
0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 1-2a \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & -2+4a \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7-17a
\end{array}\right].$$

Systemet har en løsning hvis og bare hvis $a = 7/17$. I dette tilfelle har systemet uendlig mange løsninger.

Oppgave 5 La V være kolonnerommet (søylerommet) til matrisen

$$\begin{bmatrix}
1 & 3 & 0 & 1 \\
2 & 1 & 5 & -3 \\
-1 & -1 & -2 & 1
\end{bmatrix}$$

og la

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Finn det nærmeste punktet til $\mathbf{b}$ i V (den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ inn i V).

Først gir Gausseliminasjon

$$\begin{bmatrix}
1 & 3 & 0 & 1 \\
2 & 1 & 5 & -3 \\
-1 & -1 & -2 & 1
\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}
1 & 3 & 0 & 1 \\
0 & -5 & 5 & -5 \\
0 & 2 & -2 & 2
\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}
1 & 3 & 0 & 1 \\
0 & -5 & 5 & -5 \\
0 & 0 & -0 & 0
\end{bmatrix}.$$

Derfor danner de to første kolonnene til matrisen en basis for kolonnerommet V. Vi finner en ortogonal basis for Col(A) ved å bruke Gramm-Schmidt på kolonnene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Vi får $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 2, -1)$; $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = (3, 1, -1) - \frac{6}{6}(1, 2, -1) = (2, -1, 0)$;

Dette gir

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 = 2(1, 2, -1) - (2, -1, 0) = (0, 5, -2).$$

Alternativt: La

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da har vi Col(A) = Col(C). Vi finner den ortogonale projeksjon av $\mathbf{b}$ inn i Col(C) ved den minste kvadraters metoden. Det tilhørende normalsystemet blir $C^T C\mathbf{x} = C^T\mathbf{b}$, dette er $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \end{bmatrix}$ og vi finner løsningen $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Så får vi $\mathbf{p} = C\mathbf{x} = (0, 5, -2)$.

Oppgave 6

a) La

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Bestem egenverdiene og tilhørende egenvektorer til A.

Vi har $\det(A - \lambda I) = (8 - \lambda)(7 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 15\lambda + 50$ og egenverdiene er $\lambda_1 = 10$ og $\lambda_2 = 5$. Vi finner tilhørende egenvektorer:

$$A - 10I = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad A - 5I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

og $\mathbf{u}_1 = s(3, 2),\ s \neq 0$, $\mathbf{u}_2 = t(1, -1),\ t \neq 0$.

b) I Trondheim er det utplassert sykler til gratis utleie to steder: Gløshaugen (G) og Torget (T). Syklene kan lånes fra tidlig om morgenen og må returneres til ett av stedene samme kveld. Det viser seg at av syklene utlånt fra G returneres 80% til G og 20% til T. Av syklene utlånt fra T blir 30% returnert til G og 70% returnert til T. Vi antar dette mønsteret er konstant, at alle sykler blir utlånt hver morgen og at ingen sykler blir stjålet.

I det lange løp, hvor stor andel av syklene vil være på Gløshaugen om morgenen?

Hvis (x_k, y_k) er antall sykler på Gløshaugen og på Torget en morgen, så er neste morgen antallene $(x_{k+1}, y_{k+1}) = B(x_k, y_k)$ hvor

$$B = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

Fra punkt a) vet vi at B har to egenverdier $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 0.5$ med tilhørende egenvektorer $\mathbf{u}_1 = s(3,2)$ og $\mathbf{u}_2 = t(1,-1)$. Vi tar $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3+2}(3,2) = (0.6, 0.4)$ Da skal B^n nærme seg til konstant matrisen (når n vokser)

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

I det lange løp blir fordeling av syklene 60% på Gløshaugen og 40% på Torget; de vil si 3/5 av alle syklene vil være på Gløshagen om morgenen.

Oppgave 7 Finn en (2×2)-matrise A slik at differensialligningssystemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ har generell løsning

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi leter etter en matrise A som har egenverdiene $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 0$ med tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}_1 = (3, -1)$ og $\mathbf{v}_2 = (-5, 2)$. Da vet vi at $A = PDP^{-1}$ hvor

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får

$$A = \begin{bmatrix} -12 & -30 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 8 La A være en $(m \times n)$-matrise. Vis at hvis $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsning for alle $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$, så har $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bare den trivielle løsningen.

Vi vet at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsning for alle $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$, det betyr at $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^m$. Da vet vi at $\mathrm{Col}(A)^\perp = \{0\}$. Vi vil finne $\mathrm{Null}(A^T)$; $\mathrm{Null}(A^T) = \mathrm{Row}(A^T)^\perp = \mathrm{Col}(A)^\perp = \{0\}$. Derfor har ligningen $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bare den trivielle løsningen.