NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4115 Matematikk 3
våren 2011

Løsningsforslag - Øving 1

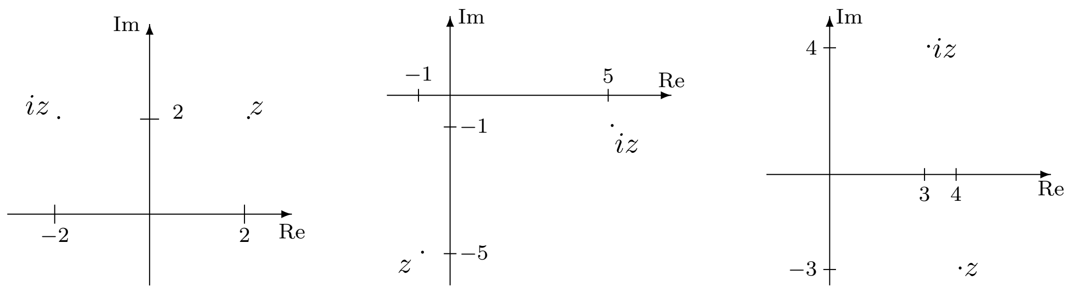
Fra Kreyszig, avsnitt 13.1

2 Vi skisserer z og iz og regner ut skalarproduktet av vektorene for ulike verdier av z for å vise at iz tilsvarer en $\pi/2$ radianers rotasjon av z i det komplekse plan.

1)
$$z = 2 + 2i$$
$$iz = -2 + 2i$$
$$[2, 2] \cdot [-2, 2] = 0$$

2)
$$z = -1 - 5i$$
$$iz = 5 - i$$
$$[-1, -5] \cdot [5, -1] = 0$$

3)
$$z = 4 - 3i$$
$$iz = 3 + 4i$$
$$[4, -3] \cdot [3, 4] = 0$$



4 Vi skal vise at hvis produktet $z_1 z_2 = 0$, så må vi enten ha at $z_1 = 0$ eller at $z_2 = 0$.

Hvis $z_1 \neq 0$, kan vi multiplisere $z_1 z_2 = 0$ på begge sider med z_1^{-1} og få $z_2 = 0$. Tilsvarende får vi at $z_1 = 0$ hvis $z_2 \neq 0$.

Alternativt: Vi antar at $z_1 \neq 0$ og at $z_1 z_2 = 0$. Da vil

$$|z_2| = \frac{|z_1||z_2|}{|z_1|} = \frac{|z_1 z_2|}{|z_1|} = \frac{0}{|z_1|} = 0$$

Når absoluttverdien $|z_2| = 0$ er også $z_2 = 0$. Tilsvarende hvis $z_2 \neq 0$.

5 Tallet $z = x + iy$ er rent imaginært hvis og bare hvis $\operatorname{Re} z = 0$. Men $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, så z er rent imaginært hvis og bare hvis $\bar{z} = -z$.

7 Vi har gitt $z_1 = 2 + 3i$ og $z_2 = 4 - 5i$. Vi skal finne

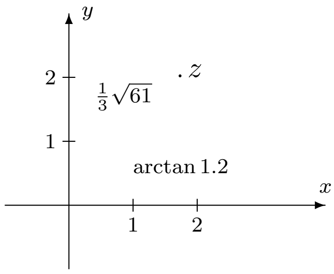
$$\begin{aligned}(5z_1 + 3z_2)^2 &= (10 + 15i + 12 - 15i)^2 = (22)^2 \\ &= 22^2 = 484 + 0i.\end{aligned}$$

8 Vi har at $\overline{z_1} = 2 - 3i$ og $\overline{z_2} = 4 + 5i$, slik at

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (2 - 3i)(4 + 5i) = 8 + 10i - 12i - 15i^2 = 8 - 2i + 15 = 23 - 2i$$

Fra Kreyszig, avsnitt 13.2

7 Vi skal skrive det komplekse tallet $z = (-6+5\mathrm{i})/3\mathrm{i}$ på polarform $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$. Først eliminerer vi den komplekse nevneren:



$$z = \frac{-6+5\mathrm{i}}{3\mathrm{i}} = \frac{(-6+5\mathrm{i})\mathrm{i}}{3\mathrm{i}^2} = \frac{-6\mathrm{i}-5}{-3} = \frac{5}{3} + 2\mathrm{i}.$$

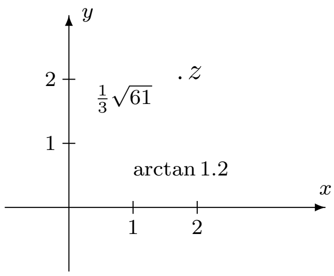
Vi får

$$r = \sqrt{\left(\tfrac{5}{3}\right)^2 + 2^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{61} \quad \text{og} \quad \tan\theta = \tfrac{2}{5/3} = \tfrac{6}{5}.$$

z ligger i 1. kvadrant, så $\theta = \arctan\frac{6}{5} \approx 0.88$.

Dermed blir $z = \frac{1}{3}\sqrt{61}\left(\cos(\arctan\frac{6}{5}) + \mathrm{i}\sin(\arctan\frac{6}{5})\right)$.

8 Vi skal skrive det komplekse tallet $z = \frac{2+3i}{5+4i}$ på polarform. Vi har



$$z = \frac{2+3i}{5+4i} = \frac{(2+3i)(5-4i)}{5^2+4^2} = \frac{22}{41} + \frac{7}{41}i$$

Da får vi $r = |z| = \sqrt{\left(\frac{22}{41}\right)^2 + \left(\frac{7}{41}\right)^2} = \frac{\sqrt{533}}{41}$, $\theta = \arg z = \arctan\frac{7}{22}$.

9 Vi søker hovedargumentet (the principal argument) $\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ for

$$z = -1 - i.$$

Det er klart at z ligger i 3. kvadrant. Med

$$\tan\theta = \frac{-1}{-1} = 1,$$

får vi dermed $\mathrm{Arg}(z) = -\pi + \arctan(1) = -\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4}$.

12 Vi søker hovedverdien (the principal value) for argumentet til $-\pi^2$. Da $-\pi^2$ er et negativt reelt tall får vi at $\mathrm{Arg}(-\pi^2) = \pi$.

15 Vi søker hovedverdien (the principal value) for argumentet til $(9+9i)^3$.

$$\mathrm{Arg}(9+9i) = \mathrm{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg(9+9i)^3 = 3\cdot\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Med $k=0$ får vi vinkelen $3\pi/4$, som er i intervallet $(-\pi, \pi]$. Følgelig er $\mathrm{Arg}(9+9i)^3 = 3\pi/4$.

20 Vi skal representere det komplekse tallet $z = 12(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$ på formen $z = x + \mathrm{i}y$. Vi observerer at z er gitt på polarform med $r = 12$ og $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Vi får

$$x = r\cos\theta = 12\cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

og

$$y = r\sin\theta = 12\sin\frac{3\pi}{2} = -12,$$

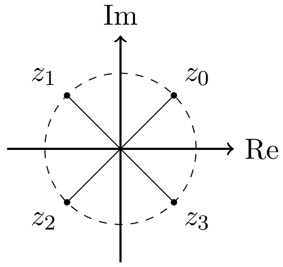
så $z = -12i$.

$\boxed{23}$ Polarformen av -1 er $\cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$, så vi bruker formelen øverst på side 611 med $r = 1, \theta = \pi$ og $n = 4$:

$$\sqrt[n]{z} = \left(\cos\frac{\pi(1+2k)}{4} + i\sin\frac{\pi(1+2k)}{4}\right)$$

for $n = 0, 1, 2, 3$. Det gir oss røttene

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\\
z_1 &= \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\\
z_2 &= \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\\
z_3 &= \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

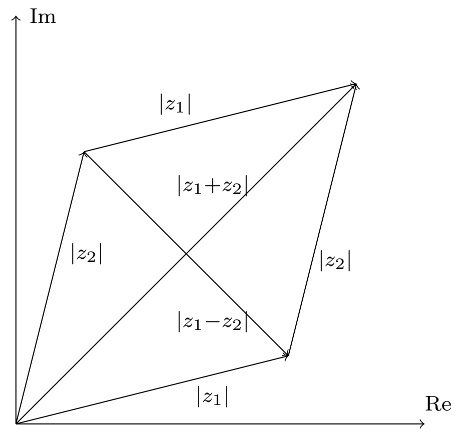


$\boxed{33}$ Vi skal vise *parallellogramlikheten* $|z_1 + z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

Vi har at

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})\\
&= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2}\\
&= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.
\end{aligned}$$

For å forklare navnet på likheten ser vi for oss et parallellogram utspent av vektorene z_1 og z_2. $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$ representerer summen av kvadratene av lengdene av den korte diagonalen $|z_1-z_2|$ og den lange diagonalen $|z_1+z_2|$. Summen av kvadratene av sidene i parallellogrammet er $2(|z_1|^2+|z_2|^2)$. Vi har vist at disse uttrykkene er like store. Derav navnet *parallellogramlikheten*.



Alternativt: Vi kunne også ha vist *parallellogramlikheten* slik

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\\
&= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2\\
&\quad + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2\\
&= 2(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2)\\
2(|z_1|^2 + |z_2|^2) &= 2(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2).
\end{aligned}$$

Eksamensoppgave

$\boxed{1}$ For $w = -8 + 8i\sqrt{3}$ er $r = |w| = 8\sqrt{1+3} = 16$, og $\theta = \operatorname{Arg} w = \pi + \arctan(-\sqrt{3})$ siden w ligger i andre kvadrant. Vi har $\arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3$, og følgelig er $\theta = 2\pi/3$ og

$$w = re^{i\theta} = 16e^{i(2\pi/3)} = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Fjerderøttene til w er da gitt ved $z_k = 16^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{2\pi/3+2k\pi}{4}}$ for $k = 0, 1, 2, 3$. Vi får altså

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 2e^{\pi i/6} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i \\
z_0 &= 2e^{2\pi i/3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3} \\
z_0 &= 2e^{7\pi i/6} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i \\
z_0 &= 2e^{5\pi i/3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}
\end{aligned}
$$