Fra Kreyszig, avsnitt 2.1

3 Gitt differensialligningen $y'' + 2y' + 2y = 0$ og initialbetingelser $y(0) = 1$ og $y'(0) = -1$. Vi skal verifisere at $y_1 = e^{-x}\cos x$ og $y_2 = e^{-x}\sin x$ er en basis av løsninger og regner først ut de deriverte ($(uv)' = u'v + uv'$, $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$):

$$\begin{aligned} y_1' &= -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x, & y_1'' &= e^{-x}\cos x + 2e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x = 2e^{-x}\sin x \\ y_2' &= -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x, & y_2'' &= e^{-x}\sin x - 2e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x = -2e^{-x}\cos x. \end{aligned}$$

Ved innsetting i ligningens venstreside får vi

$$\begin{aligned} y_1'' + 2y_1' + 2y_1 &= 2e^{-x}\sin x + 2(-e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x) + 2e^{-x}\cos x = 0 \\ y_2'' + 2y_2' + 2y_2 &= -2e^{-x}\cos x + 2(-e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x) + 2e^{-x}\sin x = 0. \end{aligned}$$

Følgelig er y_1 og y_2 løsninger, og siden de er lineært uavhengige (y_1/y_2 er ikke konstant) utgjør de en basis av løsninger. En generell løsning er

$$y = Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x = e^{-x}(A\cos x + B\sin x).$$

Derivasjon gir

$$y' = -e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + e^{-x}(B\cos x - A\sin x) = e^{-x}\big((B-A)\cos x - (A+B)\sin x\big),$$

og vi kan bestemme A og B ved å bruke initialbetingelsene:

$$1 = y(0) = A \quad \text{og} \quad -1 = y'(0) = B - A.$$

Det gir $A = 1$ og $B = 0$, og løsningen av initialverdiproblemet blir

$$y = e^{-x}\cos x.$$

5 Gitt differensialligningen $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ og initialbetingelser $y(1) = 11$ og $y'(1) = -6$. Vi skal verifisere at $y_1 = x^2$ og $y_2 = x^{-2}$ er en basis av løsninger og regner først ut de deriverte:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2x, & y_1'' &= 2, \\ y_2' &= -2x^{-3}, & y_2'' &= 6x^{-4}. \end{aligned}$$

Ved innsetting i ligningens venstreside får vi

$$\begin{aligned} x^2y_1'' + xy_1' - 4y_1 &= 2x^2 + 2x^2 - 4x^2 = 0 \\ x^2y_2'' + xy_2' - 4y_2 &= 6x^{-2} - 2x^{-2} - 4x^{-2} = 0. \end{aligned}$$

Følgelig er y_1 og y_2 løsninger, og siden de er lineært uavhengige (y_1/y_2 er ikke konstant) utgjør de en basis av løsninger. En generell løsning er

$$y = Ax^2 + Bx^{-2}.$$

Derivasjon gir

$$y' = 2Ax - 2Bx^{-3},$$

og vi kan bestemme A og B ved å bruke initialbetingelsene:

$$11 = y(1) = A + B \quad \text{og} \quad -6 = y'(1) = 2(A - B).$$

Det gir $A = 4$ og $B = 7$, og løsningen av initialverdiproblemet blir

$$y = 4x^2 + 7x^{-2}.$$

13 Hvis vi husker den trigonometriske relasjonen $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, kan vi temmelig lett se at $y_1 = 5\sin(x)\cos(x)$ og $y_2 = 3\sin(2x)$ ikke er lineært uavhengige, da $y_2 = \frac{6}{5}y_1$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

17 Vi ser at ligningen $y'' = ky'$ ikke avhenger eksplisitt av y, så vi substituerer $v = y'$, som gir førsteordensligningen $v' = kv$. Den differensialligningen har den velkjente løsningen $v = \tilde{B}e^{kx}$, som da gir oss $y' = \tilde{B}e^{kx}$. Ved å integrere på begge sider, får vi

$$\begin{aligned} y &= A + \frac{\tilde{B}}{k}e^{kx} = A + Be^{kx} \\ &= Ay_1 + By_2 \end{aligned}$$

som da er generell løsning.

Alternativt. Vi bruker metoden i boka, og merker oss at ligningen vår svarer til $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ for $p(x) \equiv -k$ og $q(x) \equiv 0$. Vi ser fort at $y_1 = 1$ er en løsning, slik at $U = \frac{1}{y_1^2}\exp\left(-\int p \,\mathrm{d}x\right) = \exp(kx)$. Dermed får vi at $y_2 = y_1 \int U \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}e^{kx}$, som gir oss samme generelle løsning som før

$$y = A + Be^{kx} \quad \text{(faktoren } \frac{1}{k} \text{ er en konstant som vi baker inn i konstanten } B\text{).}$$

20 Vi skriver først ligningen $xy'' + 2y' + xy = 0$ på standardform, ved å dividere med x:

$$y'' + 2x^{-1}y' + y = 0 \tag{1}$$

Dermed er $p(x) = 2x^{-1}$ og $q(x) = 1$ i bokens notasjon.

Innsetting av $y_2 = uy_1 = ux^{-1}\cos x$ i (1) gir (se side 51 for utledning)

$$U = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p\,\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{\cos^2 x}e^{-\int 2x^{-1}\,\mathrm{d}x} = \frac{x^2 e^{-2\ln|x|}}{\cos^2 x} = \frac{x^2}{x^2\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

der $U' = u$. Dermed er den andre løsningen gitt ved

$$y_2 = uy_1 = \frac{\cos x}{x}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \tan x}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

Merk at integrasjonskonstanter er uviktige i denne sammenhengen. (Hvorfor? Hva skjer om vi bytter ut $e^{-2\ln|x|}$ med $e^{-2\ln|x|+c_1}$, og $u = \tan x$ med $\tan x + c_2$ i utregningene over?).

Fra Kreyszig, avsnitt 2.2

5 Vi søker en generell løsning av differensialligningen $100y'' + 20y' - 99y = 0$, og løser først den karakteristiske ligningen $100\lambda^2 + 20\lambda - 99 = 0$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{(20)^2 + 4 \cdot 100 \cdot 99}}{2 \cdot 100}$$

Som gir de to reelle røttene $\lambda_1 = -\frac{11}{10}$ og $\lambda_2 = \frac{9}{10}$. En basis av løsninger er da $y_1 = e^{-\frac{11}{10}x}$ og $y_2 = e^{\frac{9}{10}x}$, og en generell løsning er

$$y = Ae^{-\frac{11}{10}x} + Be^{\frac{9}{10}x}.$$

Kontroll:

$$\begin{aligned} y' &= -A\frac{11}{10}e^{-\frac{11}{10}x} + B\frac{9}{10}e^{\frac{9}{10}x} \\ y'' &= A\frac{121}{100}e^{-\frac{11}{10}x} + B\frac{81}{100}e^{\frac{9}{10}x}. \end{aligned}$$

Altså er

$$100y'' + 20y' - 99y = A(121 - 22 - 99)e^{-\frac{11}{10}x} + B(81 + 18 - 99)e^{\frac{9}{10}x} = 0$$

18 Vi kan skrive $1 = e^{0x}$. Vi søker derfor en differensialligning $y'' + ay' + by = 0$ med basis $y_1 = e^{0x}$, $y_2 = e^{-3x}$. Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ må da ha løsninger $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = -3$, og den karakteristiske ligningen må følgelig kunne skrives

$$(\lambda - 0)(\lambda + 3) = 0 \qquad \text{dvs.} \qquad \lambda^2 + 3\lambda = 0.$$

En differensialligning med denne karakteristiske ligningen er

$$y'' + 3\,y' = 0.$$

23 Vi skal løse initialverdiproblemet $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$ og $y'(0) = -5$. Vi finner først generell løsning ved å finne røttene til det karakteristiske polynomet $\lambda^2 + 4\lambda + 5$, de er gitt av

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 5}}{2} = -2 \pm i$$

vi får et komplekskonjugert par til røtter, og den generelle løsningen blir dermed (j.fr s 57 i Kreyszig)

$$y(x) = e^{-2x}(A\cos(x) + B\sin(x)).$$

Vi regner ut $y'(x)$, for å kunne bestemme A og B

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2e^{-2x}(A\cos(x) + B\sin(x)) + e^{-2x}(-A\sin(x) + B\cos(x)) \\ &= e^{-2x}((B - 2A)\cos(x) - (2B + A)\sin(x)). \end{aligned}$$

Vi får dermed fra initalbetingelsene

$$\begin{aligned} 2 &= y(0) = A \\ -5 &= y'(0) = B - 2A \end{aligned}$$

som gir $A = 2$ og $B = -1$, dermed får vi løsningen på initialverdiproblemet

$$y(x) = e^{-2x}(2\cos(x) - \sin(x))$$

Kontroll. Vi merker oss først at $y'(x)$ er på formen $e^{-2x}(C\cos(x)+D\sin(x))$ for $C = B-2A$ og $D = -(2B + A)$. Så

$$y''(x) = e^{-2x}((D-2C)\cos(x)-(2D+C)\sin(x)) = e^{-2x}((3A-4B)\cos(x)+(4A+3B)\sin(x)).$$

Dermed får vi ved innsetting i differensialligningen at

$$y''+4y'+5y = e^{-2x}((3A-4B+4\cdot(B-2A)+5A)\cos(x)+(4A+3B-4\cdot(2B+A)+5B)\sin(x)) = 0$$

Til slutt merker vi oss at med $A = 2$ og $B = -1$ får vi

$$\begin{aligned} y(0) &= A = 2 \\ y'(0) &= B - 2A = -5 \end{aligned}$$

som vi skulle ha.

Flervalgsoppgaver

$\boxed{1}$ Vi skal regne ut $\mathrm{Im}((1-i)^{10})$. her er det en veldig stor fordel å konvertere til polarkoordinater. Vi merker oss først at siden $\mathrm{Re}(1-i) > 0$ og $\mathrm{Im}(1-i) < 0$, ligger $(1-i)$ i fjerde kvadrant. Så

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4} \\ r &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Med andre ord, får vi $(1-i)^{10} = (\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i})^{10} = 32e^{-\frac{5\pi}{2}i} = 32e^{-\frac{\pi}{2}i}$.
$\mathrm{Im}(32e^{-\frac{\pi}{2}i}) = 32\sin(-\frac{\pi}{2}i) = -32$. Altså er svaralternativ C rett. (Merk at D er et luresvar da imaginærdelen til et komplekst tall skal være reell).

$\boxed{2}$ Vi skal løse $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$. Vi finner først røttene til det karakteristiske polynomet $\lambda^2 - 6\lambda + 9$. Ut i fra det får vi dobbelroten $\lambda = 3$, som gir oss den generelle løsningen

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^{3x}.$$

for å finne c_1 som vi trenger for å finne $y(0)$, regner vi ut $y'(x) = (3c_1 + c_2(x + 3))e^{3x}$, og får $1 = y(1) = (c_1 + c_2)e^3$ og $0 = y'(1) = (3c_1 + 4c_2)e^3$. Vi eliminerer c_2 ved å multiplisere den førstnevnte ligningen med 4 og trekker den fra den sistnevnte. Dette gir $-c_1e^3 = 4$, altså er D rett svaralternativ.

Eksamensoppgave

$\boxed{1}$ Finn alle løsninger til ligningen

$$z^5 = \frac{16(2\sqrt{3} - 1 - i(2 + \sqrt{3}))}{2 - i},$$

og tegn løsningene i det komplekse plan.

Løsning. Det er i første omgang lurt å forenkle uttrykket ved å regne ut

$$\begin{aligned} w &= \frac{16(2\sqrt{3}-1-i(2+\sqrt{3}))}{2-i} = \frac{16(2\sqrt{3}-1-i(2+\sqrt{3}))(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\ &= \frac{16(4\sqrt{3}-2+2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}i-i-4i-2i\sqrt{3})}{5} = 16(\sqrt{3}-i). \end{aligned}$$

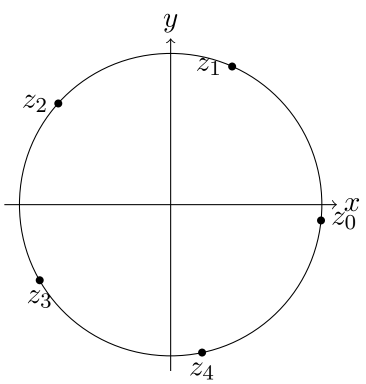
Fra dette merker vi oss at w ligger i fjerde kvadrant, og dermed er $r = |w| = 16\sqrt{3+1^2} = 32$ og $\theta = \text{Arg}w = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$. Dermed kan vi representere w ved

$$w = 32e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)}, \quad k = 0,1,2,3,4$$

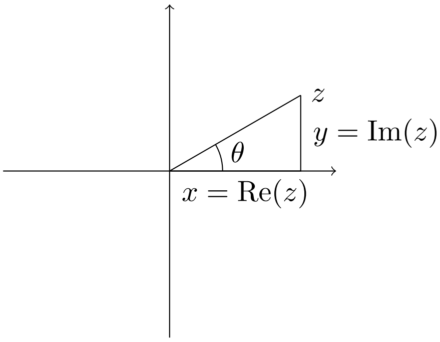
Løsningene til $z^5 = w$ er da gitt ved

$$z_k = \sqrt[5]{32}e^{i\left(-\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi k}{5}\right)}, \quad k = 0,1,2,3,4.$$

$$\begin{aligned} z_0 &= 2e^{-i\frac{\pi}{30}} \\ z_1 &= 2e^{i\frac{11\pi}{30}} \\ z_2 &= 2e^{i\frac{23\pi}{30}} \\ z_3 &= 2e^{i\frac{35\pi}{30}} \\ z_4 &= 2e^{i\frac{47\pi}{30}} \end{aligned}$$



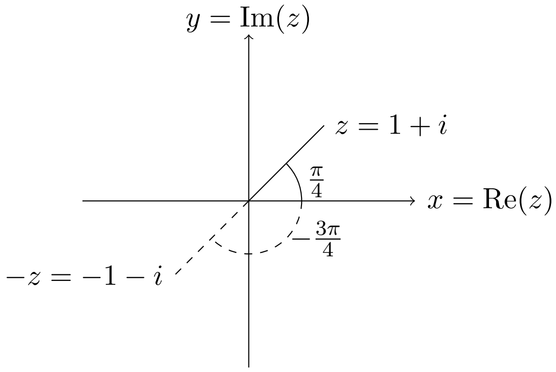
Ekstraoppgave



Tegner vi $z = x+iy$ inn i det komplekse plan, ser vi at linja for origo til z som representerer r og linjene for x-komponenten og y-komponenten, danner en rettvinklet trekant. Fra grunnleggende trigonometri, vet vi at

$$\tan(\theta) = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}} = \frac{y}{x}.$$

Vi søker et komplekst tall $w = u + iv$ slik at $\tan(\theta) = \frac{v}{u}$. Vi merker oss at $\frac{cy}{cx} = \frac{y}{x}$ for alle $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. La oss da altså velge $u = cx$ og $v = cy$, som gir oss $w = u + iv = cx + icy = cz$ med egenskapen $\tan(\theta) = \frac{v}{u}$ for alle $c \in \mathbb{R}$ der $c \neq 0$.
Med andre ord, multiplikasjon av z med et reelt tall forskjellig fra null bevarer $\tan(\theta)$, men merk at det generelt ikke bevarer θ! Dette er illustrert i figuren under, der vi har tatt tallet $z = 1 + i$, og multiplisert det med -1. Vi ser at dette speiler punktet z om origo i det komplekse planet.



Dette illustrerer hvorfor brøken $\frac{y}{x}$ ikke er nok til å bestemme θ unikt. Vi trenger også informasjon om hvilken kvadrant z ligger i. Kjenner vi kvadranten til z, kan vi bestemme θ ut i fra tabellen

z i første kvadrant	z i andre kvadrant	z i tredje kvadrant	z i fjerde kvadrant
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \pi$	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - \pi$	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$