Løsningsforslag - Øving 3

Fra Kreyszig, avsnitt 2.4

1 Vi skal bestemme A og B slik at $y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ oppfyller startbetingelsene $y(0) = y_0$ og $y'(0) = v_0$. Siden

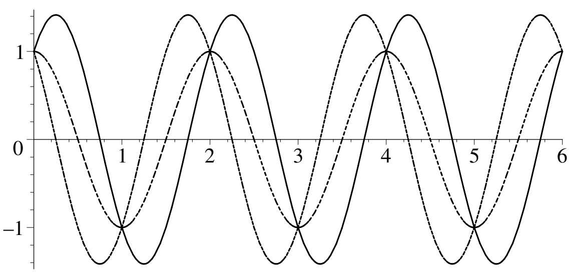
$$y(0) = A \quad \text{og} \quad y'(0) = (-\omega_0 A\sin\omega_0 t + \omega_0 B\cos\omega_0 t)\Big|_{t=0} = \omega_0 B,$$

får vi $A = y_0$ og $B = v_0/\omega_0$. Følgelig er

$$y(t) = y_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

Med $y_0 = 1$ og $\omega_0 = \pi$ skal vi skissere løsningskurvene for forskjellige verdier av v_0.

$v_0 = \pi$:
$$y(t) = \cos\pi t + \sin\pi t = \sqrt{2}\,\cos\left(\pi t - \tfrac{1}{4}\pi\right)$$
$v_0 = 0$:
$$y(t) = \cos\pi t$$
$v_0 = -\pi$:
$$y(t) = \cos\pi t - \sin\pi t = \sqrt{2}\,\cos\left(\pi t + \tfrac{1}{4}\pi\right)$$



Vi ser at kurvene skjærer hverandre for $t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 6$. Generelt har vi skjæringspunkt mellom kurvene $y_1 = \cos\pi t + (v_{01}/\pi)\sin\pi t$ og $y_2 = \cos\pi t + (v_{02}/\pi)\sin\pi t$ når

$$(v_{01}/\pi)\sin\pi t = (v_{02}/\pi)\sin\pi t \quad \text{dvs. når} \quad (v_{01} - v_{02})\sin\pi t = 0.$$

Siden $\sin\pi t = 0$ når t er heltall, vil alle kurvene skjære hverandre for $t = 0, 1, 2, 3, \ldots.$

6 Som for et masse/fjær–system får vi (ved å bruke Arkimedes' lov istedenfor Hookes lov)

$$my'' = -\rho g(\pi r^2 y)$$

der m er bøyens masse, ρ er vannets massetetthet, $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$, g er tyngdeakselerasjonen, $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$, r er bøyens radius, $r = 0.3$ m, og $\pi r^2 y$ er volumet og $\rho g(\pi r^2 y)$ tyngden av den ekstra vannmengden som fortrenges når bøyens vertikale posisjon avviker y meter fra likevektspunktet. Det gir bevegelsesligningen

$$y'' + \omega_0^2 y = 0 \qquad (\text{der } \omega_0^2 = \rho g\pi r^2/m).$$

En generell løsning er $y = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$. Vi har gitt at perioden T er 2 sekunder, og siden $T = 2\pi/\omega_0$, får vi

$$2 = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad \text{som gir} \qquad \omega_0^2 = \pi^2 \qquad \text{dvs.} \qquad \frac{\rho g\ \pi r^2}{m} = \pi^2.$$

Dermed får vi $m = \rho g r^2/\pi \approx 281$ kg.

$\boxed{14}$ Vi har bevegelsesligningen $my'' + cy' + ky = 0$ der $m = 2$ kg. Siden bevegelsen skal være underdempet, må den karakteristiske ligningen $2\lambda^2 + c\lambda + k = 0$ ha komplekse røtter som her blir på formen $\lambda = -c/4 \pm i\omega^*$. Løsningen y kan følgelig skrives på formen

$$y = Ce^{-ct/4}\cos(\omega^* t - \delta).$$

Vi skal finne dempningskonstanten c.

Tidsavstanden mellom to påfølgende maksima er 2 sekunder. La t_1 være tidspunktet for første maksimum. Etter 15 svingninger er da tidspunktet $t_1 + 2\cdot 15 = t_1 + 30$. Ved tidspunktene t_1 og $t_1 + 30$ er cosinusfaktoren den samme (hvorfor?), men y-verdien ved det siste tidspunktet skal være en fjerdedel av y-verdien ved det første tidspunktet. Altså er

$$Ce^{-c(t_1+30)/4}\cos(\omega^* t_1 - \delta) = \tfrac{1}{4}Ce^{-ct_1/4}\cos(\omega^* t_1 - \delta).$$

Det gir $e^{-30c/4} = \frac{1}{4}$, altså $-30c = 4\ln\frac{1}{4} = -4\ln 4$ og dermed $c = \frac{2}{15}\ln 4 = \frac{4}{15}\ln 2$.

Fra Kreyszig, avsnitt 2.5

$\boxed{1}$ Vi skal finne en generell løsning av differensialligningen $x^2y'' - 6y = 0$. Dette er en Euler-Cauchy ligning, og innsetting av $y = x^m$ og $y'' = m(m-1)x^{m-2}$ gir

$$x^m(m(m-1) - 6) = x^m(m^2 - m - 6) = 0$$

for alle x, så vi må ha at $m^2 - m - 6 = 0$. Røttene til denne ligningen er gitt ved

$$m = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

så $m = 3$ og $m = -2$. Dermed er generell løsning gitt ved

$$y = c_1x^3 + c_2x^{-2}$$

$\boxed{11}$ Vi skal løse initialverdiproblemet $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$. Ligningen er en Euler–Cauchyligning ($x^2y'' + axy' + by = 0$), og vi kan finne løsninger av formen $y = x^m$ ved å løse hjelpeligningen $m^2 + (a-1)m + b = 0$. Den blir her

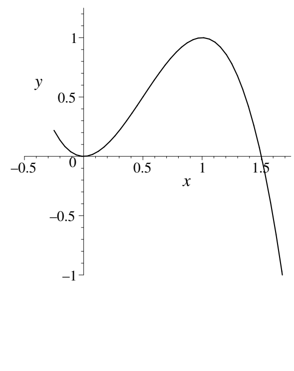
$$m^2 - 5m + 6 = 0 \quad \text{og har røtter} \quad m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2. \end{cases}$$

Følgelig har ligningen generell løsning

$$y = c_1x^3 + c_2x^2.$$

Vi bestemmer c_1 og c_2 ved å bruke initialbetingelsene:

$$\begin{aligned} 1 &= y(1) = c_1 + c_2 \\ 0 &= y'(1) = (3c_1x^2 + 2c_2x)\Big|_{x=1} = 3c_1 + 2c_2. \end{aligned}$$



Vi får $c_2 = -\frac{3}{2}c_1$ som innsatt i den første ligningen gir $c_1 = -2$ og dermed $c_2 = 3$. Løsningen blir altså

$$y = 3x^2 - 2x^3.$$

Fra Kreyszig, avsnitt 2.6

$\boxed{3}$ Vi søker en differensialligning $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ med $y_1 = e^{kx}$ og $y_2 = xe^{kx}$ som løsninger. Vi merker oss først at den første løsningen er eksponensiell så ligningen vi søker har formen $y'' + Ay' + By = 0$, videre ser vi fra argumentet til eksponentialfunksjonen at èn av røttene til den karakteristiske ligningen er $\lambda = k$. Det at $y_2 = xy_1$, tydere på at $\lambda = k$ er en dobbel-rot (se side 55 i Kreyszig). Den karakteristiske ligningen er dermed $(\lambda - k)^2 = \lambda^2 - 2k\lambda + k^2$, og en korresponderende ODE, som gitte uttrykk er løsning av er

$$y'' - 2ky' + k^2 y = 0.$$

For å se at disse løsningene er lineært uavhengige, viser vi det først (a) ved brøken

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{xe^{kx}}{e^{kx}} = x,$$

da x ikke er konstant, konstanterer vi at y_1 og y_2 er lineært uavhengige. Vi kan også vise det ved å benytte teorem 2 i boka (b). Wronsky-determinanten blir

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = e^{kx}(e^{kx} + kxe^{kx}) - kxe^{kx}e^{kx} = e^{2kx},$$

da $e^{2kx} \neq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, konkluderer vi med at y_1 og y_2 ikke er lineært avhengige, altså må de være lineært uavhengige.

$\boxed{8}$ Vi søker en differensialligning $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ med $y_1 = e^{-2x}$ og $y_2 = xe^{-2x}$ som løsninger. Da dette er eksponensiallfunksjoner, er det naturlig å forsøke en homogen ligning med konstante koeffisienter; i så tilfelle må den karakteristiske ligningen ha en dobbelrot $\lambda = -2$. Altså er det karakteristiske polynomet gitt ved

$$h(\lambda) = (\lambda + 2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4.$$

Differensialligningen tilhørende dette polynomet er

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Lineær uavhengighet ser vi enkelt, siden (a) $y_1/y_2 = 1/x$ ikke er konstant, alternativt ved (b) Teorem 2, siden Wronskideterminanten er

$$W(y_1, y_2) = e^{-2x}(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) + 2e^{-2x}xe^{-2x} = e^{-4x}$$

ikke er 0 noe sted på $\mathbb{R}$.

$\boxed{13}$ Vi søker en differensialligning $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ med $y_1 = e^{-x}\cos 0.8x$ og $y_2 = e^{-x}\sin 0.8x$ som løsninger. Vi gjenkjenner y_1 og y_2 som løsninger av en homogen ligning med konstante koeffisienter; i dette tilfellet er røttene til den karakteristiske ligningen komplekse, og på formen $\lambda = -1 \pm 0.8i$. For å bestemme et andregradspolynom på formen $h(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c = 0$, bruker vi den kjente løsningsformelen

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

som gir at $b = 2$ og

$$\frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{4 - 4c}}{2} = \sqrt{1 - c} = 0.8i$$

så $1 - c = -0.8^2 = -0.64$ eller $c = 1.64$. Dermed er den søkte differensialligningen gitt ved

$$y'' + 2y' + 1.64y = 0$$

Kvotienten y_1/y_2 er $\cot 0.8x$, som ikke er konstant, så løsningene er lineært uavhengige, noe som også kan sees utifra Teorem 2 og det faktum at Wronskideterminanten

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= y_1 y_2' - y_2 y_1' \\ &= e^{-x} \cos 0.8x(-e^{-x} \sin 0.8x + 0.8e^{-x} \cos 0.8x) \\ &\quad - e^{-x} \sin 0.8x(-e^{-x} \cos 0.8x - 0.8e^{-x} \sin 0.8x) \\ &= 0.8e^{-2x}(\cos^2 0.8x + \sin^2 0.8x) = 0.8e^{-2x} \end{aligned}$$

er forskjellig fra 0 for alle x.

Eksamensoppgave

2 **a)** Den karakteristiske ligningen blir $\lambda^2 + 6\lambda + 18 = 0$, som har røtter $\lambda = -3 \pm 3i$. Systemet er dermed underdempet. Generell løsning av differensialligningen blir $y(t) = e^{-3t}(A\cos(3t) + B\sin(3t)$.

Initialbetingelsene $y(0) = 0$, $y'(0) = 0.6$ gir $A = 0$ og $B = 0.2$. Så partikulærløsningen som oppfyller disse kravene er $y(t) = 0.2e^{-3t}\sin(3t)$.

3 Ligningen oppgitt er en Euler-Cauchy-ligning, så vi prøver $y(x) = x^m$. Dette gir $m(m-1) - 4m + 6 = 0$, som har løsninger $m = 2$ og $m = 3$. Generell løsning blir da $y(x) = Ax^2 + Bx^3$.