Fra Kreyszig, avsnitt 2.7

3 Vi skal løse ligningen (1) $y''-16y = 19.2e^{4x}+60e^{x}$. Den karakteristiske ligningen $\lambda^2-16 = 0$ har røtter $\lambda = \pm 4$. Generell løsning av den homogene ligningen er da

$$y_h = c_1e^{4x} + c_2e^{-4x}.$$

En partikulær løsning y_p av (1) kan vi finne ved hjelp av ubestemte koeffisienters metode. Vi bruker regelen om at y_p blir en sum tilsvarende leddene i $r(x) = 19.2e^{4x} + 60e^{x}$, og vi bruker modifikasjonsregelen på det første leddet i y_p siden e^{4x} er en løsning i den homogene ligningen. Formen på y_p blir dermed

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} = xAe^{4x} + Be^{x}.$$

Derivasjon gir $y_p' = (A + 4Ax)e^{4x} + Be^{x}$ og $y_p'' = (8A + 16Ax)e^{4x} + Be^{x}$. Innsatt i (1):

$$8Ae^{4x} - 15Be^{x} = 19.2e^{4x} + 60e^{x} \quad \Longleftrightarrow \quad A = 2.4,\ B = -4.$$

Generell løsning av (1) blir da

$$y = y_h + y_p = c_1e^{4x} + c_2e^{-4x} + 2.4xe^{4x} - 4e^{x}.$$

6 Vi skal løse ligningen (1) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\sin(2x)$. Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0$ har dobbelrot: $\lambda = -2$ Generell løsning av den homogene ligningen er da

$$y_h = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}.$$

En partikulær løsning y_p av (1) kan vi finne ved hjelp av ubestemte koeffisienters metode. Vi ser at høyresiden av ligningen ikke er en løsning av det homogene ligningen, så vi kan bruke den grunnleggende regelen. Vi prøver dermed

$$y_p = e^{-2x}(K\cos(2x) + M\sin(2x))$$

Derivasjon gir

$$\begin{aligned}
y_p' &= -2e^{-2x}(K\cos(2x) + M\sin(2x)) + e^{-2x}(-2K\sin(2x) + 2M\cos(2x))\\
&= 2e^{-2x}((M-K)\cos(2x) - (K+M)\sin(2x))\\
\Longrightarrow\ y_p'' &= 4e^{-2x}((-(K+M) - (M-K))\cos(2x) - ((M-K) + (-(K+M)))\sin(2x)\\
&= 8e^{-2x}(-M\cos(x) + K\sin(2x).
\end{aligned}$$

Innsatt i (1):

$$\begin{aligned}
y_p'' + 4y_p' + 4y_p &= 4e^{-2x}((-2M + 2(M-K) + K)\cos(2x) + (2K - 2(K+M) + M)\sin(2x))\\
&= 4e^{-2x}(-K\cos(2x) - M\sin(2x)) = e^{-2x}\sin(2x)
\end{aligned}$$

Vi får altså $-4K = 0$ og $-4M = 1$, som følgelige gir $K = 0$ og $M = -\frac{1}{4}$.Generell løsning av (1) blir da

$$\begin{aligned}
y &= y_h + y_p\\
&= c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\sin(2x)
\end{aligned}$$

15 Vi skal løse ligningen (1) $y''+4y = 16\cos(2x)$ med initialbetingelsene $y(0) = 0$ og $y'(0) = 0$. Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + 4 = 0$ har røtter $\lambda = 2i$ og $\lambda = -2i$ Det gir

$$y_h = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

som løsning av den homogene differensialligningen.

For å finne en partikulær løsning y_p av (1), bruker vi ubestemte koeffisienters metode. Vi ser at høyresida av differensialligningen er en løsning av den homogene ligningen, så vi må bruke modifikasjonsregelen som tilsier at vi skal multiplisere partikulærløsningen vi vanligvis hadde valgt med x. Så vi prøver altså med

$$y_p = x(K\cos(2x) + M\sin(2x))$$

Derivasjon gir

$$\begin{aligned} y_p' &= K\cos(2x) + M\sin(2x) + 2x(M\cos(2x) - K\sin(2x)) \\ y_p'' &= 4(M\cos(2x) - K\sin(2x)) - 4x(K\cos(2x) + M\sin(2x)) \end{aligned}$$

Innsatt i (1) får vi

$$\begin{aligned} y_p'' + 4y &= 4(M\cos(2x) - K\sin(2x)) - 4x(K\cos(2x) + M\sin(2x)) + 4x(K\cos(2x) + M\sin(2x)) \\ &= 4(M\cos(2x) - K\sin(2x)) = 16\cos(2x) \end{aligned}$$

Sammenligner vi koeffisienter gir dermed: $M = 4$ og $K = 0$. Den generelle løsningen av (1) blir dermed

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= A\cos(2x) + B\sin(2x) + 4x\sin(2x). \end{aligned}$$

Vi regner først ut $y'(x)$ for å finne A og B ut i fra initialbetingelsene:

$$y' = 2B\cos(2x) - 2A\sin(2x) + 4\sin(2x) + 8x\cos(2x)$$

fra dette får vi

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = A \\ 0 &= y'(0) = 2B \end{aligned}$$

Altså, $A = 0$ og $B = 0$, og løsningen av initialverdiproblemet blir

$$y = y_p = 4x\sin(2x).$$

19 Vi skal løse ligningen (1) $y'' - y' - 12y = 144x^3 + 12.5$ med initialbetingelsene $y(0) = 5$ og $y'(0) = -0.5$. Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ har røtter $\lambda_1 = -3$ og $\lambda_2 = 4$. Det gir

$$y_h = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x}$$

som løsning av den homogene differensialligningen.

For å finne en partikulær løsning y_p av (1), bruker vi ubestemte koeffisienters metode. Ifølge hovedregelen (basic rule) er y_p på formen

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Da er $y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C$ og $y_p'' = 6Ax + 2B$. Innsatt i (1) får vi

$$-12Ax^3 + (-3A - 12B)x^2 + (6A - 2B - 12C)x + (2B - C - 12D) = 144x^3 + 12.5.$$

Sammenligner vi koeffisientene for hver potens av x, får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} [x^3]: &\quad -12A = 144 \\ [x^2]: &\quad -3A - 12B = 0 \\ [x]: &\quad 6A - 2B - 12C = 0 \\ [x^0]: &\quad 2B - C - 12D = 12.5 \end{aligned}$$

med løsning (ovenfra og nedover) $A = -12$, $B = 3$, $C = -6.5$ og $D = 0$. Den generelle løsningen av (1) blir dermed

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x} - 12x^3 + 3x^2 - 6.5x\,.$$

Så tilpasser vi løsningen til initialbetingelsene:

$$\begin{aligned} 5 = y(0) &= c_1 + c_2 \\ -0.5 = y'(0) &= -3c_1 + 4c_2 - 6.5 \end{aligned} \qquad \text{dvs.} \qquad \begin{aligned} c_1 + c_2 &= 5 \\ -3c_1 + 4c_2 &= 6. \end{aligned}$$

Det gir $c_1 = 2$ og $c_2 = 3$, og løsningen av initialverdiproblemet blir

$$y = 2e^{-3x} + 3e^{4x} - 12x^3 + 3x^2 - 6.5x\,.$$

Fra Kreyszig, avsnitt 2.8

$\boxed{15}$ Vi skal løse ligningen (1) $y'' + 2y' + 26y = 13\cos(3t)$ med initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0.4$. Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + 2\lambda + 26 = 0$ har røtter

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 104}}{2} = -1 \pm 5i$$

Det gir

$$y_h = e^{-t}(A\cos(5t) + B\sin(5t))$$

som løsning av den homogene differensialligningen.

For å finne en partikulær løsning y_p av (1), bruker vi ubestemte koeffisienters metode. Vi ser at høyresiden ikke er en løsning av den homogene ligningen, så vi kan bruke hovedregelen, som tilsier at vi prøver

$$y_p = K\cos(3t) + M\sin(3t)$$

Da er $y_p' = 3M\cos(3t) - 3K\sin(3t)$ og $y_p'' = -9K\cos(3t) - 9M\sin(3t)$ Innsatt i (1) får vi

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' + 26y &= (-9K + 6M + 26K)\cos(3t) + (-9M - 6K + 26M)\sin(3t) \\ &= (17K + 6M)\cos(3t) + (17M - 6K)\sin(3t) = 13\cos(3t) \end{aligned}$$

Sammenligner vi koeffisientene, får vi

$$\begin{aligned} 17K + 6M &= 13 \\ 17M - 6K &= 0 \end{aligned}$$

Dette gir $M = \frac{6}{25}$ og $K = \frac{17}{25}$. Den generelle løsningen av (1) blir dermed

$$y = y_h + y_p = e^{-t}(A\cos(5t) + B\sin(5t)) + \frac{1}{25}(17\cos(3t) + 6\sin(3t))$$

Vi finner dermed A og B og fra initialbetingelsene, ved å først finne $y'(t)$:

$$\begin{aligned}y' &= -e^{-t}(A\cos(5t) + B\sin(5t)) + 5e^{-t}(B\cos(5t) - A\sin(5t)) + \frac{3}{25}(6\cos(3t) - 17\sin(3t))\\ &= e^{-t}((5B - A)\cos(5t) - (5A - B)\sin(5t)) + \frac{3}{25}(6\cos(3t) - 17\sin(3t)).\end{aligned}$$

Vi får dermed fra initialbetingelsene

$$1 = y(0) = A + \frac{17}{25}$$
$$0.4 = y'(0) = 5B - A + \frac{18}{25}$$

som gir $A = \frac{8}{25}$ og $B = 0$. løsningen på initialverdiproblemet blir dermed

$$y = \frac{1}{25}(8e^{-t}\cos(5t) + 17\cos(3t) + 6\sin(3t)).$$

Vi skal også skissere $y - y_p = y_h$, som er vist i figur 2. Vi ser at løsningen dør mer eller mindre ut rundt $t = 7$, hvor den i praksis når den stasjonære løsningen.

Fra Kreyszig, avsnitt 2.10

$\boxed{2}$ Vi skal løse ligningen (1) $y'' - 4y' + 4y = x^2e^x = r(x)$. Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$ har dobbelrot $\lambda = 2$. Generell løsning av den homogene ligningen er da

$$y_h = Ay_1 + By_2 = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$$

Fra dette, får vi at wronskideterminanten blir

$$W = y_1y_2' - y_2y_1' = e^{2x}(e^{2x} + 2xe^{2x}) - 2xe^{2x}e^{2x} = e^{4x}$$

Dermed får vi følgende uttrykk for integralene:

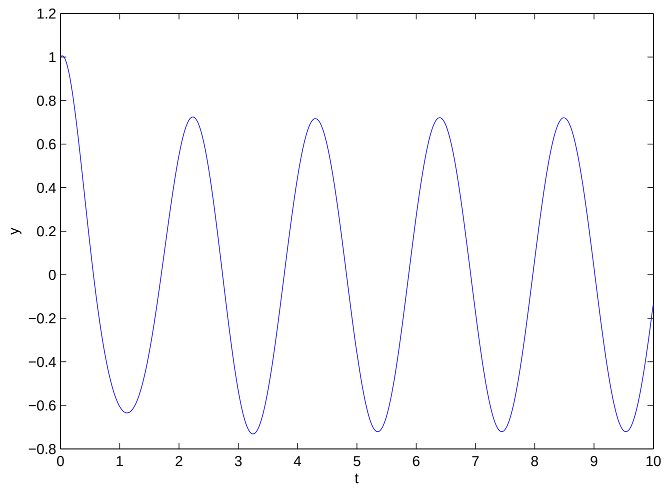
$$\int \frac{y_2 r}{W}\,\mathrm{d}x = \int x^3e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{y_1 r}{W}\,\mathrm{d}x = \int x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Dette er to nokså enkle integral å regne ut, så her er det en fordel å bruke metoden variasjon av parametere. Vi regner ut de to integralene ved hjelp av delvis integrasjon:

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x &= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)\\ \int x^3e^{-x}\,\mathrm{d}x &= -x^3e^{-x} + 3\int x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -e^{-x}(x^3 + 3 * (x^2 + 2x + 2))\\ &= -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)\end{aligned}$$

Fra dette får vi partikulærløsningen

$$\begin{aligned}y_p(x) &= -y_1\int \frac{y_2 r}{W}\,\mathrm{d}x + y_2\int \frac{y_1 r}{W}\,\mathrm{d}x\\ &= e^{2x}e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) - xe^{2x}e^{-x}(x^2 + 2x + 2)\\ &= e^x(x^2 + 4x + 6)\end{aligned}$$



Figur 1: Skisse av løsningen i oppgave 2.8.15

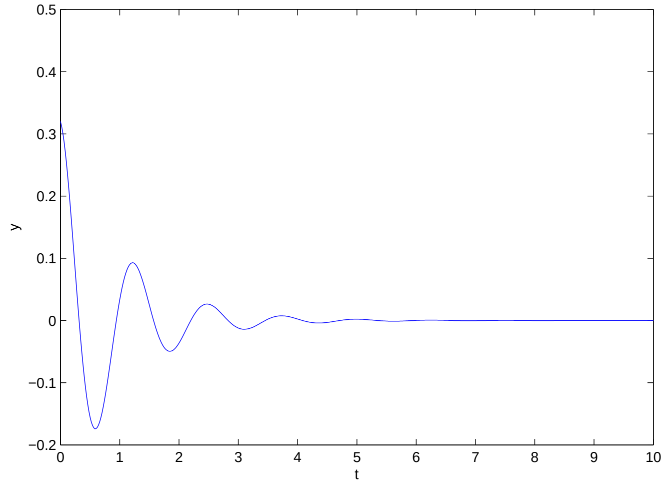
Generell løsning av (1) blir altså

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= Ae^{2x} + Bxe^{2x} + (x^2 + 4x + 6)e^x \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Vi skal løse den inhomogene Euler–Cauchyligningen (1) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \cos x$. I den tilhørende homogene ligningen $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ er $y = x^m$ løsning hvis og bare hvis $m^2 - 3m + 2 = 0$ (Kreyszig 2.5). Vi får $m_1 = 1$ og $m_2 = 2$, og følgelig er

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1x + c_2x^2.$$

Vi bruker variasjon av parametermetoden til å finne en partikulær løsning av (1) på formen $y_p = uy_1 + vy_2$. Wronskideterminanten er $W = y_1y_2' - y_2y_1' = x^2$, og høyresiden i (1) (NB



Figur 2: Skisse av $y - y_p$ i oppgave 2.8.15

når (1) er på standardform) er $r(x) = (x^3 \cos x)/x^2 = x \cos x$. Da får vi

$$\begin{aligned} y_p &= -y_1 \int \frac{y_2 r}{W}\,dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W}\,dx \\ &= -x \int x \cos x\,dx + x^2 \int \cos x\,dx = -x(x \sin x + \cos x) + x^2 \sin x = -x \cos x\,. \end{aligned}$$

Alternativt: u' og v' skal tilfredsstille ligningssystemet

$$\begin{aligned} u'y_1 + v'y_2 &= 0 \\ u'y_1' + v'y_2' &= r \end{aligned} \qquad \text{dvs.} \qquad \begin{aligned} xu' + x^2v' &= 0 \\ u' + 2xv' &= x \cos x\,. \end{aligned}$$

Det gir $v' = \cos x$ og $u' = -x \cos x$, og ved (delvis) integrasjon får vi $u = -x \sin x - \cos x$ og $v = \sin x$. Dermed blir $y_p = ux + vx^2 = -x \cos x$ (som ovenfor), og generell løsning av

(1) er

$$y = y_h + y_p = c_1 x + c_2 x^2 - x\cos x.$$

Fra Kreyszig, avsnitt 2.R

$\boxed{27}$ Bevegelsesligningen for masse/fjær-systemet er her

$$(1) \qquad 0.25y'' + y = 15\cos 0.5t - 7\sin 1.5t \qquad \text{dvs.} \qquad y'' + 4y = 60\cos 0.5t - 28\sin 1.5t$$

med startbetingelser $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Den homogene ligningen $y'' + 4y = 0$ har generell løsning $y_h = A\cos 2t + B\sin 2t$. En partikulærløsning av (1) har formen $y_p = (K_1\cos 0.5t + M_1\sin 0.5t) + (K_2\cos 1.5t + M_2\sin 1.5t)$, og ved innsetting i (1) får vi

$$3.75(K_1\cos 0.5t + M_1\sin 0.5t) + 1.75(K_2\cos 1.5t + M_2\sin 1.5t) = 60\cos 0.5t - 28\sin 1.5t,$$

og dermed $K_1 = 16$, $M_1 = 0$, $K_2 = 0$ og $M_2 = -16$. Generell løsning av (1) er følgelig

$$y = y_h + y_p = A\cos 2t + B\sin 2t + 16(\cos 0.5t - \sin 1.5t).$$

Da er $y' = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t - 8\sin 0.5t - 24\cos 1.5t$, og til bestemmelse av A og B har vi

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = A + 16 \\ 0 &= y'(0) = 2B - 24 \end{aligned}$$

som gir $A = -16$ og $B = 12$. Løsningen blir altså

$$y = -16\cos 2t + 12\sin 2t + 16(\cos 0.5t - \sin 1.5t).$$

De to siste leddene skyldes den påtrykte kraften. For de to første leddene (dvs. for det frie systemet) er $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 2$. Følgelig ville vi fått resonans dersom den påtrykte kraften hadde hatt frekvens $\omega/(2\pi) = 2/(2\pi) = 1/\pi \approx 0.32$ Hz.

Eksamensoppgave

$\boxed{2}$ **b)** Vi prøver $y_p = C\cos(3t) + D\sin(3t)$, og setter inn i ligningen

$$(9C + 18D)\cos(3t) + (9D - 18C)\sin(3t) = 45\cos(3t).$$

Dette gir $C = 1$ og $D = 2$, og dermed blir $y_p = \cos(3t) + 2\sin(3t)$. Vi har regnet ut løsningen av den homogene ligningen i del a), så den generelle løsningen blir $y(t) = e^{-3t}(A\cos(3t) + B\sin(3t)) + \cos(3t) + 2\sin(3t)$. Siden $e^{-3t}(A\cos(3t) + B\sin(3t)) \to 0$ når $t \to \infty$, blir den stasjonære løsningen $y(t) = \cos(3t) + 2\sin(3t)$

$\boxed{3}$ **b)** Vi bruker variasjon av parametere. Vi har $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$ og $r(x) = x^2e^x$. Wronskideterminanten blir $W(x) = y_1y_2' - y_1'y_2 = x^4$. Metoden gir da

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -y_1 \int \frac{y_2 r}{W}\,\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 r}{W}\,\mathrm{d}x \\ &= -x^2 \int xe^x\,\mathrm{d}x + x^3 \int e^x \mathrm{d}x \\ &= -x^2(xe^x - e^x) + x^3e^x = x^2e^x. \end{aligned}$$

Så $y_p = x^2e^x$ er en partikulærløsning.