Fra Edwards Penney, avsnitt 1.2

12 Vi bruker elementære radoperasjoner for å omforme totalmatrisen til echelon form (trappeform):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & -9 \\ 2 & 5 & 0 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{SWAP}(R_1,R_3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & -5 \\ 2 & 7 & 1 & -9 \\ 3 & 1 & -3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[(-\frac{3}{2})R_1+R_3]{-R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -\frac{13}{2} & -3 & \frac{27}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -13 & -6 & 27 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{13}{2}R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right].$$

Vi kan nå løse med tilbakesubstitusjon

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_3 &= 1 \\ 2x_2 &= -4 - x_3 \\ 2x_1 &= -5 - 5x_2 \end{aligned}$$

som gir $\underline{\underline{x_3 = 2, x_2 = -3 \text{ og } x_1 = 5.}}$

14 Vi bruker elementære radoperasjoner for å omforme totalmatrisen til echelonform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 17 \\ 1 & -2 & -2 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{SWAP}(R_1,R_3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -9 \\ 2 & -4 & 1 & 17 \\ 3 & -6 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-3)R_1+R_3]{(-2)R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & 35 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-\frac{4}{5})R_2+R_3]{\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ligningssystemet er konsistent, $x_3 = 7$ og x_2 er fri variabel. Vi setter $x_2 = t$ og finner x_1 ved tilbakesubstitusjon:

$$x_1 = -9 + 2x_2 + 2x_3 = -9 + 2t + 14 = 5 + 2t.$$

Vi får uendelig mange løsninger (x_1, x_2, x_3) gitt ved $x_1 = 5 + 2t$, $x_2 = t$, $x_3 = 7$, $t \in \mathbb{R}$.

18 Vi bruker elementære radoperasjoner for å omforme totalmatrisen til echelonform:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & 1 & 13 & 15 \\ 3 & -6 & 3 & 21 & 21 \\ 2 & -4 & 5 & 26 & 23 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_3+R_2]{-R_3+R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & -13 & -8 \\ 1 & -2 & -2 & -5 & -2 \\ 2 & -4 & 5 & 26 & 23 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_1+R_2]{(-2)R_1+R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & -13 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 52 & 39 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{13}R_3]{\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & -13 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_3+R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & -13 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ligningssystemet er konsistent, x_4 og x_2 er fri variable. Vi setter $x_2 = t$, $x_4 = s$ og finner x_1 og x_3 ved tilbakesubstitusjon:

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 - 4x_4 = 3 - 4s, \\ x_1 &= -8 + 2x_2 + 4x_3 + 13x_4 = -8 + 2t + 4(3 - 4s) + 13s = 4 + 2t - 3s. \end{aligned}$$

Vi får uendelig mange løsninger (x_1, x_2, x_3, x_4) gitt ved $x_1 = 4+2t-3s$, $x_2 = t$, $x_3 = 3-4s$, $x_4 = s$, $s, t \in \mathbb{R}$.

20 Vi bruker elementære radoperasjoner for å omforme totalmatrisen til echelonform:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & -7 & 3 & 9 \\ 5 & 8 & -7 & 6 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{SWAP(R_1,R_2)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -7 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & -2 & 2 & 6 \\ 5 & 8 & -7 & 6 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-2)R_1+R_2]{(-5)R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -7 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & -5 & 12 & -4 & -12 \\ 0 & -7 & -17 & 41 & -14 & -41 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -7 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -6 & 2 & 6 \\ 0 & -7 & -17 & 41 & -14 & -41 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{7R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -7 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -6 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2R_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -7 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -6 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Ligningssystemet er konsistent, x_4 og x_5 er frie variable. Vi setter $x_4 = t$, $x_5 = s$ og finner ved tilbakesubstitusjon:

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 + 2x_4 = 2 + 2t, \\ x_2 &= 6 - \frac{5}{2}x_3 + 6x_4 - 2x_5 = 6 - \frac{5}{2}(2 + 2t) + 6t - 2s = 1 + t - 2s, \\ x_1 &= 9 - 3x_2 - 2x_3 + 7x_4 - 3x_5 = 9 - 3(1 + t - 2s) - 2(2 + 2t) + 7t - 3s = 2 + 3s. \end{aligned}$$

Vi får uendelig mange løsninger $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ gitt ved $x_1 = 2 + 3s$, $x_2 = 1 + t - 2s$, $x_3 = 2 + 2t$, $x_4 = t$, $x_5 = s$ $s, t \in \mathbb{R}$.

23 Vi bruker elementære radoperasjoner for å omforme totalmatrisen til echelonform:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & k \end{array}\right] \xrightarrow{(-2)R_1+R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k-2 \end{array}\right]$$

a) Uansett verdi av k vil dette systemet aldri har en entydig løsning.
b) Dersom $k \neq 2$ så har vi et inkonsistent system, og systemet har ingen løsning.
c) Dersom $k = 2$ så vil systemet bli konsistent, og siden y er en fri variabel så får vi da uendelig mange løsninger.

Fra Edwards Penney, avsnitt 1.3

6 Gauss-Jordan-eliminasjon gir

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 19 \\ 4 & -7 & 70 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-4)R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 19 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{16}$ Gauss-Jordan-eliminasjon gir

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 15 & 7 \\ 2 & 4 & 22 & 8 \\ 2 & 7 & 34 & 17 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-2)R_1+R_2]{(-2)R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 15 & 7 \\ 0 & -2 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-3)R_3+R_1]{2R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{SWAP(R_2,R_3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eksamensoppgave

$\boxed{2}$ **a)** Den karakteristiske ligningen blir $\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$, den har røtter $\lambda_{1,2} = 3 \pm 4i$. Generell løsning er $y(x) = e^{3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$. Vi setter inn initialbetingelsene og før $c_1 = 1$ og $3c_1 + 4c_2 = -1$, dette gir $c_2 = -1$, og

$$y(x) = e^{3x}(\cos 4x - \sin 4x).$$

b) Vi finner først en partikulær løsning. I følge ubestemte koeffisienters metode har ligningen en partikulær løsning på formen $y_p(x) = (Ax + B)e^x$. Innsetting gir

$$y'' - 6y' + 25y = (20Ax - 4A + 20B)e^x,$$

så vi får $A = 1$ og $B = 0.2$, dermed $y_p(x) = (x + 0.2)e^x$. Generell løsning har formen $y = y_p + y_h$ hvor y_h er en generell løsning til den homogene ligningen. Svaret blir

$$y(x) = (x + 0.2)e^x + (c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)e^{3x}.$$

Flervalgsoppgaver

$\boxed{1}$ For at et system skal være overdempet på $c^2 > 4km$. I dette tilfellet får vi da $k < 1$, altså svar D.

$\boxed{2}$ Vi ser at $W(x, x^2)(0) = 0$, da kan $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ ikke være lineært uavhengige løsninger til en 2. ordens lineær homogen ligning på intervallet $(-1, 1)$. Svaret er altså A.