Fra Edwards & Penney, avsnitt 1.4

3 Vi bruker definisjonene for multiplikasjon og addisjon av matriser på side 31 i E&P, og regner ut (mens vi merker oss at skalarmultiplikasjonen må gjøres før matriseaddisjonen).

$$
\begin{aligned}
cA + dB &= -2 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -14 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & 20 \\ 12 & 8 \\ 28 & 16 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -26 & 20 \\ 12 & -6 \\ 22 & 18 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

9 Svarene blir (etter litt regning): AB er udefinert og

$$
BA = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -22 \end{bmatrix}.
$$

20 Det homogene systemet

$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 \qquad\qquad + \ 7x_5 &= 0 \\
x_3 \qquad - \ 2x_5 &= 0 \\
x_4 - 10x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

kan på matriseform skrives

$$
\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

Ligningssystemet er på redusert echelonform, og x_2 og x_5 er frie variabler. Vi setter $x_2 = s$ og $x_5 = t$ og får

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3s - 7t \\
x_2 &= s \\
x_3 &= 2t \\
x_4 &= 10t \\
x_5 &= t
\end{aligned}
\qquad \text{eller} \qquad
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Løsningen av det gitte homogene systemet er altså

$$
\mathbf{x} = s(3, 1, 0, 0, 0) + t(-7, 0, 2, 10, 1), \quad s, t \in \mathbb{R}.
$$

39 Vi skal vise: Hvis $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ løser den homogene ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, så er også $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ en løsning av samme ligning $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

At $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ løser $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ betyr at $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ og $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. Når vi i tillegg bruker den distributive loven for matrisemultiplikasjon, får vi

$$A(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1A\mathbf{x}_1 + c_2A\mathbf{x}_2 = c_1\mathbf{0} + c_2\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Så $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ er også en løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

40 **a)** Vi skal vise: Gitt at $\mathbf{x}_0$ er en løsning av det homogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, og gitt at $\mathbf{x}_1$ er en løsning av det inhomogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, så er $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$ en løsning av det **samme** inhomogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Ved den distributive loven for matrisemultiplikasjon har vi

$$A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1) = A\mathbf{x}_0 + A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Vi har vist at $A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1) = \mathbf{b}$, så $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$ løser det inhomogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b) Vi skal vise : Gitt at $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ løser det inhomogene systemet i **a)**, så er $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ en løsning av det homogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

så $A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$. Differansen mellom to løsninger til det inhomogene systemet er altså en løsning av det homogene systemet.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 1.5

3 Vi følger instruksene i boka, og regner ut

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{6 \cdot 6 - 5 \cdot 7}\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

Vi kan deretter finne løsningen $\mathbf{x}$ av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ved å multiplisere begge sider fra venstre med A^{-1}:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot 2 + (-7) \cdot (-3) \\ (-5) \cdot 2 + 6 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ -28 \end{bmatrix}$$

13 Ved Gauss-Jordaneliminasjon får vi (jf. EP 1.5 eksempel 7):

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{SWAP}(R_1,R_2)} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-3)R_1+R_3]{(-2)R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-3)R_2+R_1]{(2)R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 5 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-5)R_3+R_1]{(1)R_3+R_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -13 & 42 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 & 1 \end{array}\right],$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -13 & 42 & -5 \\ 3 & -9 & 1 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

20 Ved Gauss-Jordaneliminasjon får vi (jf. EP 1.5 eksempel 7):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{SWAP}(R_1,R_2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-1)R_3+R1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)R_1+R_2]{(-1)R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-\frac{5}{7})R_3+R_2]{(\frac{4}{7})R_3+R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(1/7)R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \end{array}\right],$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & 1 \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \end{bmatrix}.$$

32 Skal vise at om $AB = AC$ og A er invertibel, så er $B = C$. Vi multipliser fra venstre med A^{-1}, og får

$$A^{-1}AB = A^{-1}AC \Rightarrow IB = IC \Rightarrow B = C.$$

Eksamensoppgave

2 Ingen biler forsvinner fra kryssene, så

$$\begin{aligned} x_1 + 450 &= 610 + x_2 \\ x_2 + 520 &= 480 + x_3 \\ x_3 + 390 &= 600 + x_4 \\ x_4 + 640 &= 310 + x_1. \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 \\ -40 \\ 210 \\ -330 \end{bmatrix}.$$

Adderer vi de tre første ligningene til den siste, får vi en ligning med bare 0-er, og følgelig har vi uendelig mange løsninger siden de 3 første allerede er på echelonform. Med $x_4 = t$ som fri variabel får vi generell løsning

$$\begin{aligned} x_4 &= t \\ x_3 &= 210 + x_4 = 210 + t \\ x_2 &= -40 + x_3 = 170 + t \\ x_1 &= 160 + x_2 = 330 + t. \end{aligned}$$

Når $x_4 = 200$, er $t = 200$, og vi får $x_1 = 530$, $x_2 = 370$, $x_3 = 410$.