Fra Edwards & Penney, avsnitt 2.2

9 Vi utvikler determinanten etter andre kolonne og får

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 8 \\ 7 & -4 & -9 \end{vmatrix} = -(-4)\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 8.$$

35 Vi skal regne ut $V(a,b)$ og $V(a,b,c)$. For

$$V(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}$$

bruker vi rett og slett bare definisjonen av determinanten til en 2x2-matrise direkte, og får

$$V(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - a.$$

For V(a,b,c) bruker vi kofaktorutvikling, og regner ut langs første kolonne.

$$\begin{aligned} V(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} a & a^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix} \\ &= bc^2 - cb^2 + ca^2 - ac^2 + ab^2 - ba^2. \end{aligned}$$

Det er ikke umiddelbart åpenbart at dette er lik $(b-a)(c-a)(c-b)$, men dersom vi ekspanderer, får vi:

$$\begin{aligned} (b-a)(c-a)(c-b) &= (b-a)(c^2 - cb - ac + ab) \\ &= bc^2 - cb^2 - abc + ab^2 - ac^2 + abc + ca^2 - ba^2 \\ &= bc^2 - cb^2 + ca^2 - ac^2 + ab^2 - ba^2 \end{aligned}$$

som viser at $V(a,b,c) = (b-a)(c-a)(c-b)$.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 2.3

5 Vi bruker teorem 1, som forteller oss hvordan vi kan regne ut determinanten av matrisen ved å redusere matrisen til echelon-form.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad (-1)\text{rad1} + \text{rad2} \quad (1)\text{rad1} + \text{rad3} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3)\text{rad2} + \text{rad3} \\ &= 3 \cdot (-2) \cdot 1 = -6 \end{aligned}$$

26 Fra $A^T = A^{-1}$ får vi

$$|A| = |A^T| = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|},$$

og $|A|^2 = 1$, som gir $|A| = \pm 1$.

27 La $A = P^{-1}BP$, da vil i følge produktsetningen for determinanter

$$\det A = \det P^{-1}BP = \det P^{-1} \cdot \det B \cdot \det P = \frac{1}{\det P} \cdot \det B \cdot \det P = \det B.$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 2.4

22 a) Siden $\det A \neq 0$, er A invertibel og vi kan bruke Theorem 2 side 105 i EP. Med $\det A = 1$ gir det at $A^{-1} = \operatorname{adj} A = [A_{ij}]^T$. Siden alle elementene i A er hele tall, er alle kofaktorene A_{ij} også hele tall, og alle elementene i A^{-1} er hele tall.

b) Fra $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ følger at $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, og siden både A^{-1} og $\mathbf{b}$ består av hele tall, gjør også $\mathbf{x}$ det.

23 Dersom A er symmetrisk vil $A_{ij} = A_{ji}$, slik at kofaktormatrisen til A er symmetrisk. Da vil adj $A = [A_{ij}]^T$ være symmetrisk og følgelig er

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{\det A} [A_{ij}]^T$$

også symmetrisk.

Alternativt (med kjennskap til transponeringsreglene side 86): Generelt har vi for A invertibel at $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Dette følger fra at $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$. Så for A symmetrisk er $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$, og A^{-1} er også symmetrisk.

Eksamensoppgave

A-2 **a)** Vi skal finne alle komplekse tall z slik at

$$z^3 = -1 + i,$$

Vi skriver høyresiden opp på polarform: $|-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ og $\tan(\theta) = -1$. Vi merker oss at $-1+i$ ligger i andre kvadrant i det komplekse plan, så $\theta = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$. dermed har vi

$$-1 + i = \sqrt{2} \exp\left(\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi j\right) i\right) \quad \text{for } j = 0, 1, 2$$

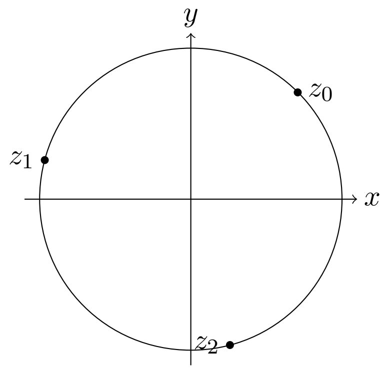
dermed blir

$$z_j = 2^{\frac{1}{6}} \exp\left(\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi j}{3}\right) i\right) \quad \text{for } j = 0, 1, 2$$

$$z_0 = 2^{\frac{1}{6}} \exp\left(\frac{\pi}{4} i\right) = 2^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 2^{-\frac{1}{3}}(1 + i)$$

$$z_1 = 2^{\frac{1}{6}} \exp\left(\frac{11\pi}{12} i\right) \approx -1.0842 + 0.2905i$$

$$z_2 = 2^{\frac{1}{6}} \exp\left(-\frac{5\pi}{12} i\right) \approx 0.2905 - 1.0842i$$



b) Vi ser at $w = z_1 = 2^{\frac{1}{6}} \exp\left(\frac{11\pi}{12} i\right)$ da dette tallet ligger i andre kvadrant. For at tallet w^n skal være reelt, må vi ha $\sin(\frac{11\pi n}{12}) = 0$ som er oppfylt, dersom argumentet er et heltallig multiplum av π. Så ved for eksempel velge $n = 12$, vil w^{12} bli det reelle tallet

$$w^{12} = 2^2 \cos(11\pi)) = -4.$$

A-49 Vi tar determinanten på begge sider av likheten $A^2 = A$ og bruker teorem 3 på side 97 i E&P:

$$\begin{aligned} \det(A^2) &= (\det(A))^2 = \det(A) \\ \Longrightarrow \det(A)&(\det(A) - 1) = 0 \end{aligned}$$

For at den siste ligningen skal stemme, må vi enten ha $\det(A) = 0$ eller $\det(A) = 1$.

Dersom $\det(A) = 1$, vet vi fra teorem 2 på side 96 i E&P at A er inverterbar, multipliserer vi $A^2 = A$ fra venstre eller høyre med A^{-1} får vi

$$\begin{aligned} A^{-1}A^2 &= A^{-1}A \\ A &= I \end{aligned}$$

A trenger ikke nødvendigvis å være nullmatrisen for å oppfylle $A^2 = A$ og $\det(A) = 0$. La for eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det kan lett verifiseres at $A^2 = A$ og $\det(A) = 0$, men A er åpenbart ikke nullmatrisen.

3 Vi regner ut determinanten til A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 4 & 0 \\ 4 & a & 3 \\ 0 & 3 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & a \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a(a^2 - 25) = a(a-5)(a+5).$$

Siden A er inverterbar hvis og bare hvis determinanten til A er forskjellig fra 0, har vi at A er inverterbar hvis og bare hvis $a(a-5)(a+5) \neq 0$, dvs $a \neq 0, -5, 5$.