Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.1

2 La vektorene $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ og $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ være i W. Da vet vi at $u_1 = 5u_2$ og $v_1 = 5v_2$, som igjen betyr at for $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$ har vi

$$u_1 + v_1 = 5u_2 + 5v_2 = 5(u_2 + v_2)$$

som betyr at $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ også er i W. for $c\mathbf{u} = (cu_1, cu_2, cu_3)$ har vi

$$cu_1 = c(5u_2) = 5(cu_2)$$

som betyr at $c\mathbf{u}$ også er i W. Ettersom W er ikke-tom ($\mathbf{0} \in W$), kan vi konkludere fra teorem 1 at W danner et underrom av $\mathbf{R}^3$.

8 Merk at for $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 0$ hvis og bare hvis $x_1 = x_2 = 0$. Vi har altså at $W = \{\mathbf{0}\}$. Da er W et underrom i $\mathbb{R}^2$ ved Teorem 1: $\mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$ og $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$ for alle $c \in \mathbb{R}$.

12 W danner ikke et underrom av $\mathbb{R}^4$, det er enklest å se ved et moteksempel. Betrakt vektorene $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 0)$ og $\mathbf{v} = (0, 1, 0, 0)$. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ ettersom $u_1u_2 = 1 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 0 = u_3u_4$, og $v_1v_2 = 0 \cdot 1 = 0 = 0 \cdot 0 = v_3v_4$. Men $\mathbf{w} = \mathbf{u}+\mathbf{v} = (1, 1, 0, 0)$ er ikke i W, ettersom $w_1w_2 = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0 = 0 \cdot 0 = w_3w_4$, så ved teorem 1, danner ikke W et underrom av $\mathbb{R}^4$

18 Vi bruker metoden fra eksempel 5, side 170 i EP. Systemet på redusert echelon form er (her droppes høyre side som hele tiden er bare nuller)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

De frie variablene er $x_4 = s$ og $x_5 = t$, og dermed er $x_3 = -2s + 5t$, $x_2 = -s - 4t$ og $x_1 = -3x_2 - 2x_3 - 5s + t = (3s + 12t) + (4s - 10t) - 5s + t = 2s + 3t$. Løsningen er

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2s+3t \\ -s-4t \\ -2s+5t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

20 Redusert trappeform av koeffisientmatrisa til dette systemet er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Her er x_4 en fri variabel. Løsningen blir:

$x_3 = -2t, \quad x_2 = 3t, \quad x_1 = -5t, \quad x_4 = t$

Løsningsvektorene er på formen $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5t \\ 3t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Løsningsrommet er følgelig mengden av alle skalare multipla av vektoren $\mathbf{u} = (-5, 3, -2, 1)$.

27 Vi bruker Theorem 1 side 167 i EP. La $\mathbf{x} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ og $\mathbf{y} = c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ være i V, og la $r \in \mathbb{R}$. Da er $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (a + c)\mathbf{u} + (b + d)\mathbf{v}$ og $r\mathbf{x} = (ra)\mathbf{u} + (rb)\mathbf{v}$ med i W, så W er et underrom i V.

Flervalgsoppgaver

1 Her er det nok enklest å bruke inversmatrisen til A, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, og regne ut matriseproduktet

$$B = A^{-1}(AB) = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Altså er svaralternativ **A:** rett.

2 Det enkleste, er nok her å redusere matrisen til echelon-form

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 4 \\ k & 1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & k+1 & 3 \\ 0 & k+1 & 5-k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & k+1 & 3 \\ 0 & 0 & 2-k \end{bmatrix}.$$

Hvis en av pivot-elementen er null, vil ikke matrisen være inverterbar. Dette er tilfelle for $k = 2$ og $k = -1$, følgelig er svaralternativ **D:** rett.

Eksamensoppgaver

4 **a)** Elementære radoperasjoner gir at den utvidede koeffesientmatrisen

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc:c} a & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & b & 4 \end{array}\right]$$

er radekvivalent med

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & b & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & b & 4 \\ 0 & 0 & 1-ab & 0 & 1-4a \\ 0 & 0 & 0 & 1-ab & 1-4a \end{array}\right].$$

Så hvis

- $ab \neq 1$, har vi nøyaktig èn løsning,
- $ab = 1$ og $1 - 4a \neq 0$, har vi ingen løsninger,
- $ab = 1$ og $1 - 4a = 0$, har vi uendelig mange løsninger.

Det vil si, for $a = \frac{1}{4}$ og $b = 4$, har systemet uendelig mange løsninger. I så fall får vi matrisen

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

og tilbakesubstitusjon gir

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

4 Vi prøver å finne inversmatrisen ved bruk av Gauss-Jordan-eliminasjon.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Vi har dermed vist at A er radekvivalent med identitetsmatrisen, så A er invertibel og

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$