Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.2

4 Det kan maksimalt være et sett av 3 lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^3$, så vi kan umiddelbart si at disse 4 vektorene må være lineært avhengige.

9 I dette tilfellet, kan svaret sees ved inspeksjon. Ser vi på det første elementet i w, ser vi at det kan skrives som $1 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3$, og vi ser også at $0 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2$ og $-7 = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5$, så

$$\mathbf{w} = 2 \cdot \mathbf{v}_1 - 3 \cdot \mathbf{v}_2.$$

17 Vi setter vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ som kolonnevektorer inn i matrisen A og reduserer den til echelon-form for å finne mulige løsninger.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Fra dette kan vi se at A er radekvivalent med identitetsmatrisen, og er dermed inverterbar (har determinant forskjellig fra 0). Ved teorem 3, er de tre oppgitte vektorene lineært uavhengige.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.3

2 Vi merker oss at vi har oppgitt 3 vektorer i $\mathbb{R}^3$, så disse kan potensielt være en basis for $\mathbb{R}^3$. Vi setter $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ som kolonnevektorer i A, og undersøker om vektorene er lineært avhengige ved å redusere A til Echelon-form

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Vi kan se umiddelbart fra den siste radeliminasjonen at det finnes en ikke-triviell løsning på $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, så de oppgitte vektorene danner ikke en basis for $\mathbb{R}^3$

9 Matrisen $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right]$ til ligningen

$$x - 2y + 5z = 0$$

er allerede på redusert form. Vi setter $y = s$ og $z = t$, og får $x = 2s - 5t$. Dette gir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Vektorene $(2,1,0)$ og $(-5,0,1)$ er klart lineært uavhengige og danner en basis for det gitte planet.

16 Vi gjør som beskrevet i algoritmen i boka, og løser $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ved å redusere koeffesient-matrisen A til Echelon-form.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Vi ser at $x_3 = s$ danner en fri variabel, mens x_1 og x_2 er de ledende variablene. Ved tilbakesubstitusjon får vi $x_2 = -5s$ og $x_1 = -3x_2 - 4s = 11s$. Ved å sette $s = 1$. får vi $\mathbf{x} = (11, -5, 1)$. Dermed blir basisen for løsningsrommet W $\{(11, -5, 1)\}$.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.4

1 Vi reduserer matrisen til Echelon-form for å finne en basis for rad- og kolonnerommet i henhold til algoritmene i boka.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -12 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Altså danner vektorene $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$ og $\mathbf{v}_2 = (0, 3, -12)$ en basis for radrommet.

Basisen for kolonnerommet er kolonnevektorene i den opprinnelige matrisen A som svarer til pivot-kolonnene i den reduserte matrisen. Her gjenkjenner vi kolonne 1 og 2, så basisen for kolonnerommet blir $\mathbf{c}_1 = (1, 1, 2)$ og $\mathbf{c}_2 = (2, 5, 5)$.

Flervalgsoppgaver

1 En basis for $\mathbb{R}^2$ består av to lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^2$. Vektorene i **A** og **B** er lineært avhengige, $(0,0) = 0(1,3)$ og $(-3,9) = -\frac{3}{4}(4,-12)$. Alternativ **C** har for mange vektorer. Følgelig må svaret være **D**. Vektorene $(4,1)$ og $(1,4)$ er lineært uavhengige siden de er ikkeparallelle vektorer.

2 Tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis matrisen med de tre vektorene som kolonnevektorer har determinant ulik 0 (EP 4.3 Theorem 2). Her er

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 4 \\ -3 & -5 & c-3 \end{vmatrix} = 10c - 10.$$

Vektorene er lineært uavhengige hvis og bare $10(c-1) \neq 0$, $c \neq 1$. Riktig svar er altså **C**.

Eksamensoppgaver

3 **b)** Totalmatrisen er radekvivalent til

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette vil gi en løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ som

$$\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t, s, y \in \mathbb{R}$$

Altså er en basis for $\mathrm{Null}(A)$ gitt ved

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Basis for $\mathrm{Row}(A)$ leser vi av trappeformen, den er

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Basis for $\mathrm{Col}(A)$ identifiserer vi ved å se på ledende elementer, de er i første of fjerde kolonne. Altså er første og fjerde kolonne i A

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en basis for $\mathrm{Col}(A)$.