Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.2

26 Fra definisjonen av lineær uavhengighet vet vi at siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige, så impliserer $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = 0$ at $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Tilsvarende, om $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$ og $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ skal være lineært uavhengige, må $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = 0$ implisere at $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Vi undersøker dette, ved å sette opp:

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_1 + c_3\mathbf{u}_3 &= c_1(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + c_2(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) + c_3(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ =&(c_2 + c_3)\mathbf{v}_1 + (c_1 + c_3)\mathbf{v}_2 + (c_1 + c_2)\mathbf{v}_3 = 0 \end{aligned}$$

Siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige, impliserer den siste ligningen at

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 0 \\ c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dette kan omskrives på matriseform til $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$, hvor $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ og

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Som vanlig reduserer vi A til echelon-form for å se på løsninger:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Den siste radeliminasjonen viser at A har rang 3, og er inverterbar. Dette betyr at $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ er den eneste løsningen av $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$, og at $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ og $\mathbf{u}_3$ dermed er lineært uavhengige.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.3

29 Vi tar utgangspunkt i vektorligningen

$$(*) \qquad c_1\mathbf{v_1} + \cdots + c_k\mathbf{v_k} + c\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

og må vise at eneste løsning er $c_1 = c_2 \cdots = c_k = c = 0$.

Hvis $c \neq 0$, får vi fra $(*)$ at $\mathbf{v} = -\frac{c_1}{c}\mathbf{v_1} - \cdots - \frac{c_k}{c}\mathbf{v_k}$. Det vil si at $\mathbf{v}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$. Men $\mathbf{v}$ er ikke i W, altså kan vi ikke ha $c \neq 0$. Følgelig er $c = 0$.

Setter vi inn $c = 0$ i $(*)$, får vi $c_1\mathbf{v_1} + \cdots + c_k\mathbf{v_k} = \mathbf{0}$. Siden $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$ er lineært uavhengige, følger $c_j = 0$ for $j = 1, \ldots, k$.

Dermed har vi vist at alle skalarene c_1, c_2, $\ldots$, c_k og c må være null, og vektorene $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}, \mathbf{v}$ er følgelig lineært uavhengige.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.4

15 Vi har gitt mengden

$$S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$$

av vektorer, og skal bestemme en delmengde av S som danner en basis for rommet utspent av S, dvs. vi skal finne en basis for

$$\begin{aligned} V &= \operatorname{span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\} \\ &= \text{alle mulige lineærkombinasjoner av } \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \text{ og } \boldsymbol{v}_4. \end{aligned}$$

For å gjøre dette setter vi vektorene som kolonner i en matrise $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_4 \end{bmatrix}$. Da er $V = \operatorname{Col}(A)$ og vi kan finne en basis:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{-1} & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

og vi ser at vektorene $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ og $\boldsymbol{v}_4$ er en basis for $\operatorname{span}(S)$.

19 Vi har gitt en basis $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ for et underromm av $\mathbf{R}^4$. Vi bestemme en basis som inneholder S men som også spenner ut hele $\mathbf{R}^4$, ved å bruke samme metode som i oppgave 4.4.15. Nærmere bestemt kan vi danne matrisen

$$A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og finne 4 lineært uavhengige vektorer (blant $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$) ved å redusere A til trappeform og plukke de tilhørende kolonnevektorene.

Dette gir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

og vi ser at vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ danner en basis for $\mathbf{R}^4$.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 5.1

2 Vi vil finne ut hvis vektorne $\mathbf{v}_1 = (3, -2, 3, -4), \mathbf{v}_2 = (6, 3, 4, 6), \mathbf{v}_3 = (17, -12, -21, 3)$ er parvis (innbyrdes) ortogonale. Av definisjonen i formel (1) får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= 18 - 6 + 12 - 24 = 0,\\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 &= 51 + 24 - 63 - 12 = 0,\\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 &= 102 - 36 - 84 + 18 = 0.\end{aligned}$$

Vektorene er altså innbyrdes ortogonale.

17 Vi kan gjøre som i eksempel 4, EP side 218. La A ha $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ som rader, dvs

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Da er $V = \text{Row}(A)$ og $V^{\perp} = \text{Row}(A)^{\perp} = \text{Null}(A)$. [Teorem 5 side 217 i EP]. Vi finner en basis for $\text{Null}(A)$ ved å redusere A til echelon form

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Frie variable blir $x_3 = s$ og $x_4 = t$, tilbakesubstitusjon gir dermed: $x_2 = -3s + 5t$ og $x_1 = -3x_2 - 2s - 4t = (9s - 15t) - 2s - 4t = 7s - 19t$. Vi får dermed som løsning

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7s - 19t \\ -3s + 5t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -19 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Altså danner $\{(7, -3, 1, 0), (-19, 5, 0, 1)\}$ en basis for det ortogonale komplementet.

30 Hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ og $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, så er

$$0 = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2.$$

Altså er $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, og dermed også $\mathbf{v} = -\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Flervalgsoppgaver

1 Vi skal bestemme rangen r for 3×4–matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi husker at $\text{rang}(A) = \dim \text{Row}(A) = \dim \text{Col}(A)$. Siden A har tre rader, er $r \leq 3$, og alternativ **D** ($r = 4$) er utelukket. Vi ser også at første og andre rad i A er lineært uavhengige, følgelig er $r \geq 2$ så alternativ **A** ($r = 1$) er også utelukket.

For å avgjøre om det er alternativ **B** eller **C** som er riktig, kan vi omforme A til en echelonmatrise og lese av $\dim \text{Row}(A)$ som antall ikkenullrader. Vi får

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-2)R_1+R_3]{(-1)R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Siden vi får tre ikkenullrader, er $r = 3$, og **C** er det riktige alternativet.

2 Vektorene $\mathbf{u} = (2, 2, -1, k)$ og $\mathbf{v} = (k, 1, 1, k)$ er ortogonale hvis og bare hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Vi får

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2k + 2 - 1 + k^2 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Vi ser at $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ hvis og bare hvis $k = -1$. Riktig svar er følgelig alternativ **C**.

Eksamensoppgaver

3 **a)** Vi finner basis for $\mathrm{Row}(A)$ og $\mathrm{Col}(A)$ ved å først A til echelonmatrisa E:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E.$$

En basis for $\mathrm{Row}(A)$ er ikke-nullradene i E:

$$(1, 1, -2, 0, -1),\ (0, 0, 1, 0, 1),\ (0, 0, 0, 1, 0)$$

Og en basis for $\mathrm{Col}(A)$ er kolonnene i A som tilsvarer pivotkolonnene i E:

$$(1, 2, -1, 0),\ (-2, -1, 2, 1),\ (0, 0, -3, 1).$$

b) Dimensjonen er antall vektorer i en basis. Følgelig er

$$\dim \mathrm{Row}(A) = 3 \text{ og } \dim \mathrm{Col}(A) = 3 \text{ (kontroll: } \dim \mathrm{Row}(A) = \dim \mathrm{Col}(A)).$$

Hvis, generelt, V er et underrom i $\mathbb{R}^n$, så er $\dim V + \dim V^\perp = n$. Her er $\mathrm{Row}(A)$ et underrom i $\mathbb{R}^5$, og vi får

$$\dim \mathrm{Row}(A)^\perp = 5 - \dim \mathrm{Row}(A) = 2.$$

c) Vektoren $\mathbf{u} = (3, -1, 1, 3)$ er i det ortogonale komplementet $\mathrm{Col}(A)^\perp$ siden den er ortogonal til alle vektorene i basisen for $\mathrm{Col}(A)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (1, 2 - 1, 0) &= 3 - 2 - 1 = 0 \\ \mathbf{u} \cdot (-2, -1, 2, 1) &= -6 + 1 + 2 + 3 = 0 \\ \mathbf{u} \cdot (0, 0, -3, 1) &= -3 + 3 = 0. \end{aligned}$$

Siden $\dim \mathrm{Col}(A)^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Col}(A) = 1$, er $\{\mathbf{u}\}$ en basis for $\mathrm{Col}(A)^\perp$. Følgelig er $\mathrm{Col}(A)^\perp$ utspent av $\mathbf{u}$.

Alternativt kan vi løse ligningssystemet $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$, og vise at løsningen er gitt ved $\mathbf{x} = t\mathbf{u}$, $t \in \mathbb{R}$. Siden $\mathrm{Col}(A)^\perp = \mathrm{Null}(A^T)$, følger det at $\mathrm{Col}(A)^\perp$ er utspent av $\mathbf{u}$.

Et inhomogent system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsning, hvis og bare hvis $\mathbf{b}$ er i kolonnerommet $\mathrm{Col}(A)$, eller ekvivalent, $\mathbf{b}$ er ortogonal til $\mathrm{Col}(A)^\perp$. For at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ skal ha løsning, må altså $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ oppfylle betingelsen $\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = 0$, det vil si

$$3b_1 - b_2 + b_3 + 3b_4 = 0.$$