Fra Edwards & Penney, avsnitt 5.2

2 Vi gjør slik det er beskrevet i eksempel 2 side 224. Vi har $\mathbf{p} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\right)\mathbf{a}$, og

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (1,2,3)\cdot(7,7,7) = 42,\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} &= |\mathbf{a}|^2 = 1^2+2^2+3^2 = 14.\end{aligned}$$

Følgelig er $\mathbf{p} = 3\mathbf{a} = (3,6,9)$.

16 Vi bruker definisjonen på side 226 (jf. eksempel 3 på samme side). Her har vi $\mathbf{b} = (5,0,15,10)$ og

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -1 & -2\\ -1 & 3 & -4\\ -2 & -4 & 7\end{bmatrix}.$$

I tillegg får vi at $A^T\mathbf{b} = (80,0,-15)$. Normalsystemet $A^TA\bar{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$ som vi må løse, er da

$$\begin{bmatrix} 19 & -1 & -2\\ -1 & 3 & -4\\ -2 & -4 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}80\\ 0\\ -15\end{bmatrix}.$$

Vi får

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 19 & -1 & -2 & 80\\ -1 & 3 & -4 & 0\\ -2 & -4 & 7 & -15\end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss}} \left[\begin{array}{ccc:c} 19 & -1 & -2 & 80\\ 0 & 56 & -78 & 80\\ 0 & 0 & \frac{15}{14} & -\frac{5}{7}\end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss–Jordan}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{6}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3}\end{array}\right].$$

Følgelig er minste kvadraters løsning gitt ved

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}\frac{25}{6}\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

og den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ inn i $V = \mathrm{Col}(A)$ er

$$\mathbf{p} = A\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}3\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{40}{3}\\ \frac{34}{3}\end{bmatrix}$$

20 Det homogene systemet er allerede på Echelon-form. $x_2 = s$, $x_3 = t$ og $x_4 = u$ blir frie variabler, mens $x_1 = -2s - 2t - 2u$. Dermed blir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}-2s-2t-2u\\ s\\ t\\ u\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} + u\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

så $\{(-2,1,0,0),(-2,0,1,0),(-2,0,0,1)\}$ er en basis for løsningsrommet V. Vi ønsker nå å finne den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b} = (13,13,13,13)$ inn i V. Vi lar A være matrisen som har basisvektorene for V som kolonner; dermed er $V = \mathrm{Col}(A)$ og den ortogonale projeksjonen $\mathbf{p}$ av $\mathbf{b}$ inn i V er gitt ved $\mathbf{p} = A\overline{\mathbf{x}}$, der $\overline{\mathbf{x}}$ tilfredstiller

$$A^T A\overline{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$$

Utregninger gir

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

og

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -13 \\ -13 \\ -13 \end{bmatrix}$$

Systemet $A^T A\overline{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$ kan nå løses på vanlig måte (Gausseliminasjon og tilbakesubstitusjon), eller kan sees direkte ved å observere at alle koeffesientene i A summeres til 13, som leder til $\overline{\mathbf{x}} = (-1,-1,-1)$. Da er

$$\mathbf{p} = A\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

28 Vi gjør som oppgaven sier, og bruker formelen i oppgave 27. Vi regner først ut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a_1}\cdot\mathbf{b} &= 2+4+8-6 = 8 \\
\mathbf{a_1}\cdot\mathbf{a_1} &= 1+1+1+1 = 4 \\
\mathbf{a_2}\cdot\mathbf{b} &= 2-4+8+6 = 12 \\
\mathbf{a_2}\cdot\mathbf{a_2} &= 1+1+1+1 = 4 \\
\mathbf{a_3}\cdot\mathbf{b} &= 2+4-8+6 = 4 \\
\mathbf{a_3}\cdot\mathbf{a_3} &= 1+1+1+1 = 4.
\end{aligned}$$

Dermed får vi

$$\mathbf{p} = 2(1,1,1,1) + 3(1,-1,1,-1) + (1,1,-1,-1) = (6,0,4,-2).$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 5.4

6 Vi skal bruke Gram-Schmidts ortogonaliseringsalgoritme på en basis $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ for et underrom V i $\mathbb{R}^4$. Her er

$$\mathbf{v_1} = (2,-1,1,0), \quad \mathbf{v_2} = (3,1,0,1),$$

og vi får

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v}_2}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1}\right)\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{5}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Vi dropper den skalare faktoren 1/6 (multipliserer $\widetilde{\mathbf{u}}_2$ med 6) og får en ortogonal basis (uten brøker) for V:

$$\mathbf{u}_1 = (2, -1, 1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (8, 11, -5, 6).$$

Den ortogonale projeksjonen $\mathbf{p}$ av $\mathbf{b} = (0, 0, 0, 41)$ inn i V er da, ifølge projeksjonsformelen (EP5.4, Teorem 1), gitt ved

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \left(\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\right)\mathbf{u}_1 + \left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\right)\mathbf{u}_2 \\ &= 0\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

$\boxed{12}$ Vi skal bruke Gram-Schmidts ortogonaliseringsalgoritme på en basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ for et underrom V i $\mathbb{R}^4$. Her er

$$\mathbf{v_1} = (1, 1, 0, 0), \quad \mathbf{v_2} = (2, 0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 1, 0, 1),$$

og vi får

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\right)\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\right)\mathbf{u}_1 - \left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\right)\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vi dropper den skalare faktoren 1/3 (multipliserer $\widetilde{\mathbf{u}}_3$ med 3) og får en ortogonal basis (uten brøker) for V:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (1, -1, 1, 0), \quad \mathbf{u}_3 = (1, -1, -2, 3).$$

Den ortogonale projeksjonen $\mathbf{p}$ av $\mathbf{b} = (0, 10, 0, 10)$ inn i V er da, ifølge projeksjonsformelen (EP5.4, Teorem 1), gitt ved

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \left(\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\right)\mathbf{u}_1 + \left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\right)\mathbf{u}_2 + \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3}\right)\mathbf{u}_3 \\ &= 5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{10}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Flervalgsoppgaver

1 Vi skal finne ikke-trivielle løsninger til ligningen $z - \bar{z} = z^2$, ved å innføre $z = x + yi$, blir ligningen: $(2y)i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$. For at dette skal stemme, må følgende være oppfylt:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0 \\ 2y &= 2xy \end{aligned}$$

Dersom $y = 0$ er den siste ligningen oppfylt, men den første ligninger gir da at $x = 0$, som er en triviell løsning. Vi antar derfor at $y \neq 0$, og den siste ligningen gir da $x = 1$,insatt i den første ligningen får vi $y^2 = 1$, som betyr at vi har to løsninger: $z_1 = 1 + i$ og $z_2 = 1 - i$, altså er det to ikke-trivielle løsninger på ligningen, og svaralternativ **C** er derfor riktig.

Eksamensoppgaver

3 Vi utfører Gauss-Jordan eliminasjon på A

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & 2 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & -8 & -8 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E. \end{aligned}$$

Systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har 4 frie variabler. $x_2 = t_1$, $x_4 = t_2$, $x_5 = t_3$ og $x_6 = t_4$. Fra den reduserte matrisen får vi at $x_1 = -2t_1 - t_2 - 2t_3 - t_4$ og $x_3 = 3t_2 + 4t_3 + 4t_4$. Da er

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t_1 - t_2 - 2t_3 - t_4 \\ t_1 \\ 3t_2 + 4t_3 + 4t_4 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Basis for Null(A) er

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$$

Basis for Row(A) er radene forskjellig fra 0-radene i matrisen E:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & -4 \end{bmatrix}^T \right\}$$

Basis for Col(A) er 1. og 3 søyle i A, (pivotsøylene).

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T \right\}$$

Basis for Col$(A)^\perp$ finner vi ved å finne basis for nullrommet til

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Systemet $B\mathbf{y} = \mathbf{0}$ har løsningsrom utspent av $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$, så en basis for Col$(A)^\perp$ er

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$$

Projeksjonen av $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ på $\mathrm{Col}(A)$ finner vi ved først å projisere $\mathbf{e}_3$ ned på $\mathrm{Col}(A)^\perp$. La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$. Den projiserte av $\mathbf{e}_3$ ned på $\mathrm{Col}(A)^\perp$ er gitt ved

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{e_3} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Det vil si, den projiserte av $\mathbf{e}_3$ ned på $\mathrm{Col}(A)$ er

$$\mathbf{p} = \mathbf{e}_3 - \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}^T$$

Vi kunne også ha brukt minste kvadraters metode, eller gått via en ortogonal basis for $\mathrm{Col}(A)$.