Fra Edwards & Penney, avsnitt 6.1

10 Den karakteristiske ligningen er

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -10 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(-\lambda) - 2\cdot(-10) = \lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0.$$

Altså har matrisen egenverdiene $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 4$.

Vi bestemmer tilhørende egenvektorer ved å løse ligningen

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Etter litt regning får vi at λ_1 har tilhørende egenvektor $\mathbf{v}_1 = t(5,2), t \neq 0$, mens λ_2 har egenvektoren $\mathbf{v}_2 = s(2,1), s \neq 0$.

25 Den karakteristiske ligningen er (determinanten til en øvre-triangulær matrise er produktet av elementene på diagonalen)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)^2 = 0.$$

Altså har matrisen egenverdiene $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = 2$.

Vi bestemmer tilhørende egenvektorer ved å løse ligningen

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Etter litt regning får vi at $\lambda = 1$ gir løsningen $\mathbf{v} = t(1,0,0,0) + s(0,1,0,0), s, t \neq 0$ siden x_3 og x_4 må være 0, og x_1 og x_2 er frie variable, mens $\lambda = 2$ gir $\mathbf{u} = t(1,1,1,0) + s(0,0,0,1), s, t \neq 0$ siden x_3 og x_4 er frie variable og $x_1 = x_2 = x_3$.

Vi ser at egenrommet tilhørende $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ har dimensjon 2, og $\mathbf{v}_1 = (1,0,0,0), \mathbf{v}_2 = (1,1,0,0)$ vil utgjøre en basis for dette rommet. Egenrommet tilhørende $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$ har også dimensjon 2, og $\mathbf{v}_3 = (1,1,1,0), \mathbf{v}_3 = (1,1,1,1)$ vil utgjøre en basis for dette rommet.

Løsningen blir altså $\lambda_1 = 1, \mathbf{v}_1 = (1,0,0,0); \lambda_2 = 1, \mathbf{v}_2 = (1,1,0,0); \lambda_3 = 2, \mathbf{v}_3 = (1,1,1,0); \lambda_4 = 2, \mathbf{v}_4 = (1,1,1,1)$;

27 Vi antar at $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ og at n er et positivt heltall og vi ønsker å vise at $A^n\mathbf{v} = \lambda^n\mathbf{v}$. Vi ser at

$$A^2\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(A\mathbf{v}) = \lambda(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}.$$

Denne tankegangen kan vi bruke for å vise at $A^n\mathbf{v} = \lambda^n\mathbf{v}$ ved hjelp av induksjon.

Anta at $A^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v}$ for et positivt heltall k, da har vi

$$A^{k+1}\mathbf{v} = A(A^k\mathbf{v}) \overset{\text{antagelsen vår}}{=} A(\lambda^k\mathbf{v}) = \lambda^k(A\mathbf{v}) = \lambda^k(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^{k+1}\mathbf{v}.$$

Dersom $A^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v}$ får vi altså at $A^{k+1}\mathbf{v} = \lambda^{k+1}\mathbf{v}$. Siden $A^1\mathbf{v} = A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} = \lambda^1\mathbf{v}$ stemmer dette for $k = 1$, ved induksjon stemmer det da for alle heltall $n \geq 1$.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 6.2

15 Egenverdiene og egenvektorer til den gitte matrisa er

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0, \quad \mathbf{x}_1 = (1,1,0) \quad \text{(f.eks)}\\ \lambda_2 &= 1, \quad \mathbf{x}_2 = (1,1,1) \text{ og } \mathbf{x}_3 = (-1,0,2) \quad \text{(f.eks).}\end{aligned}$$

Siden vi har 3 lineært uavhengige egenvektorer, er matrisa diagonaliserbar. Vi kan skrive $P^{-1}AP = D$ der

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ og } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

21 $\lambda = 1$ er eneste egenverdi. Tilhørende egenvektorer er gitt ved $x_1 - x_2 = 0$ eller

$$\mathbf{x} = (s,s,t) = s(1,1,0) + t(0,0,1), \qquad (s,t) \neq (0,0).$$

A er ikke diagonaliserbar da vi ikke har tre lineært uavhengige egenvektorer.

31 At A og B er similære vil si at det finnes en inverterbar matrise P slik at

$$B = P^{-1}AP.$$

Siden både A og B er inverterbare får vi

$$B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P,$$

så A^{-1} og B^{-1} er similære.

Flervalgsoppgaver

1 Ved å multiplisere A med hver av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$, får vi

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siden $(3,0,-6) = 3(1,0,-2)$, er $\mathbf{v}_2 = (1,0,-2)$ en egenvektor for A med tilhørende egenverdi $\lambda = 3$. Riktig svar er følgelig alternativ **B**.

2 La $\mathbf{v}$ være en egenvektor til matrisen A med egenverdi λ, og la $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$. Da er

$$A\mathbf{u} = A(k\mathbf{v}) = k(A\mathbf{v}) = k\lambda\mathbf{v} = \lambda(k\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u}.$$

Så $\mathbf{u}$ er også en egenvektor, men bare hvis $k \neq 0$ (per definisjon er ikke nullvektoren en egenvektor). Så riktig svar blir **C**.

Eksamensoppgaver

A-48 Vi vet at $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ der egenverdien $\lambda \neq 0$. Siden A er inverterbar, kan vi multiplisere (fra venstre) med A^{-1}, og vi får:

$$\begin{aligned} A^{-1}A\mathbf{v} &= A^{-1}\lambda\mathbf{v} \\ \mathbf{v} &= \lambda A^{-1}\mathbf{v} \\ A^{-1}\mathbf{v} &= \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Siden $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ($\mathbf{v}$ er egenvektor for A), viser dette at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A^{-1}, og at $1/\lambda$ er den tilhørende egenverdien.