TMA4115 Matematikk 3
våren 2011

Øving 10 — veiledning uke 12

Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.2

De oppgitte vektorene $\{\mathbf{v}_i\}$ er lineært uavhengige. Bruk definisjonen av lineær uavhengighet til å vise at vektorene $\{\mathbf{u}_i\}$ også er lineært uavhengige.

26 $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.3

29 La $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ være en basis for det ekte (propre) underrommet W i vektorrommet V, og anta at vektoren $\mathbf{v}$ i V ikke er i W. Vis at vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}$ er lineært uavhengige.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.4

En mengde S av vektorerer i $\mathbb{R}^4$ er gitt. Finn en undermengde av S som danner en basis for underrommet av $\mathbb{R}^4$ som er utspent av S.

15 $\mathbf{v}_1 = (3, 2, 2, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (4, 3, 2, 3)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 2, 3, 4)$

La $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ danne en basis for underrommet W av $\mathbb{R}^n$. En basis T for $\mathbb{R}^n$, som inneholder S, kan finnes ved å bruke metoden i eksempel 5 (s.194 i E&P) på vektorene

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n.$$

Gjør dette for oppgave 19.

19 Finn en basis T for $\mathbb{R}^4$ som inneholder vektorene $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$ og $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 3, 3)$.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 5.1

Finn ut om de oppgitte vektorene er innbyrdes ortogonale.

2 $\mathbf{v}_1 = (3, -2, 3, -4)$, $\mathbf{v}_2 = (6, 3, 4, 6)$, $\mathbf{v}_3 = (17, -12, -21, 3)$.

De gitte vektorene utspenner et underrom av V av det indikerte Euklidske rommet. Finn en basis for det ortogonale komplementet $V^\perp$ til V i oppgave 17.

17 $\mathbf{v}_1 = (1, 3, 2, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 7, 7, 3)$.

30 Anta at $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er ortogonale vektorer og at $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Vis at da er $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Flervalgsoppgaver

1 Bestem rangen r til 3×4–matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

A: $r = 1$ **B:** $r = 2$ **C:** $r = 3$ **D:** $r = 4$

$\boxed{2}$ For hvilke(n) k er vektorene $\mathbf{u} = (2, 2, -1, k)$ og $\mathbf{v} = (k, 1, 1, k)$ ortogonale?

A: $k = 1$ **B:** $k = \pm 1$ **C:** $k = -1$ **D:** ingen k

Eksamensoppgaver

(Fra eksamen høsten 2006)

$\boxed{5}$ En matrise A og en vektor $\mathbf{b}$ er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

a) Finn en basis for radrommet $\mathrm{Row}(A)$ og en basis for kolonnerommet $\mathrm{Col}(A)$.

b) Hva er dimensjonen til $\mathrm{Row}(A)$, $\mathrm{Col}(A)$ og det ortogonal komplementet $\mathrm{Row}(A)^{\perp}$?

c) Vis at det ortogonale komplementet $\mathrm{Col}(A)$ er utspent av vektoren $\mathbf{u} = (3, -1, 1, 3)$. Finn, for eksempel ved å gjøre bruk av $\mathbf{u}$, en betingelse som b_1, b_2, b_3 og b_4 må oppfylle dersom ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ skal ha en løsning.

Fasit

EP 4.4

15. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$

19. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

EP 5.1

17. $\{(7, -3, 1, 0), (-19, 5, 0, 1)\}$