Obligatoriske oppgaver

Saff-Snider, avsnitt 1.4

1. Omgjør hvert tall til formen $a + bi$.

(a) $e^{-i\pi/4}$

(b) $\dfrac{e^{1+3i\pi}}{e^{-1+i\pi/2}}$

(c) e^{e^i}

3. Skriv hvert av tallene i polarform $re^{i\theta}$.

(a) $\dfrac{1-i}{3}$

(b) $-8\pi(1+\sqrt{3}i)$

(c) $(1+i)^6$

8. Hvis at, for alle z,

(a) $e^{z+\pi i} = -e^z$

(b) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

Saff-Snider, avsnitt 1.5

4. Bruk $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ og vis at

(a) $(\sqrt{3}-i)^7 = -64\sqrt{3} + i64$

5. Finn alle røttene (komplekse og reelle).

(a) $(-16)^{1/4}$

(b) $1^{1/5}$

(c) $i^{1/4}$

(d) $(1-\sqrt{3}i)^{1/3}$

7. Løs ligningen

(a) $2z^2 + z + 3 = 0$

18. Vis at hvis α og β er $n$te og $m$te enhetsrøtter, henholdsvis, så er produktet $\alpha\beta$ en $k$te enhetsrot for et heltall k.

Polking, avsnitt 4.1

For hver av de andre-ordens differensiallikninger i oppgave **1 - 8**, avgjør om ligningen er lineær eller ikke-lineær. Hvis ligningen er lineær, avgjør om ligningen er homogen eller inhomogen.

1. $y'' + 3y' + 5y = 3\cos 2t$

2. $t^2y'' = 4y' - \sin t$

3. $t^2y'' + (1-y)y' = \cos 2t$

4. $ty'' + (\sin t)y' = 4y - \cos 5t$

5. $t^2y'' + 4yy' = 0$

6. $y'' + 4y' + 7y = 3e^{-t}\sin t$

7. $y'' + 3y' + 4\sin y = 0$

8. $(1-t^2)y'' = 3y$

I Oppgave **13** og **14**, vis, ved direkte substitusjon, at de gitte funksjonene $y_1(t)$ og $y_2(t)$ er løsninger av den gitte differensialligning. Deretter kontrollerer, igjen ved direkte substitusjon, at enhver lineær kombinasjon $C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$ av de to løsningene er også en løsning.

13. $y'' - y' - 6y = 0, \quad y_1(t) = e^{3t}, \quad y_2(t) = e^{-2t}$

14. $y'' + 4y = 0, \quad y_1(t) = \cos 2t, \quad y_2(t) = \sin 2t$

I Oppgave **17** og **19**, bruk Definisjon 1.22 for å forklare hvorfor $y_1(t)$ og $y_2(t)$ er lineært uavhengige løsninger av den gitte differensialligning. Finn Wronskianen og bruk den til å forklare uavhengigheten av de gitte løsningene.

17. $y'' - y' - 2y = 0, \quad y_1(t) = e^{-t}, \quad y_2(t) = e^{2t}$

19. $y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y_1(t) = e^{-2t}\cos 3t, \quad y_2(t) = e^{-2t}\sin 3t$

Eksamen kont 2004

Oppgave 1 Finn alle komplekse løsninger av ligningen

$$z^2 + (3+3i)z + 5i = 0$$

Skriv løsningene på formen $z = a + ib$, og tegn løsningene i det komplekse planet

Eksamen vår 2004

Oppgave 1 *Komplekse tall*

(a) Skriv det komplekse tallet

$$w = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}\right)^3$$

på formen $re^{i\theta}$. Finn alle komplekse tall z slik at $z^3 = w$. Skriv svaret på formen $a + ib$ der a og b er reelle tall. Bruk eksakte verdier for a og b.

(b) La z være et vilkårlig komplekst tall. Et kvadrat $OABC$ i det komplekse tallplanet har ett hjørne i origo O. Hjørnene er angitt mot urviseren. Hvis hjørnet A er tallet z, hva blir hjørnene B og C uttrykt ved z?

Valgfrie oppgaver

Saff-Snider, avsnitt 1.4

11. Avgjør hvilken av de følgende egenskapene om den reelle eksponential funksjonen forblir sann for den komplekse eksponential funksjonen (dvs., bytt x med z).

(a) e^x er aldri null

(b) e^x er en-til-en

(c) e^x er definert for alle x

(d) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

Saff-Snider, avsnitt 1.5

20. Lag et program som løser den kvadtariske ligningen

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0$$

Bruk som input de reelle og imaginære delene av a, b, c, og print løsningene i både rektangulær og polarform.

Polking, avsnitt 4.1

21. Vis at funksjonene

$$y_1(t) = t^2 \quad \text{and} \quad y_2(t) = t|t|$$

er lineært uavhengige på $(-\infty, \infty)$. Vis så at Wronskianen av de to funksjonene er lik null på $(-\infty, \infty)$. Hvorfor motsier ikke dette resultatet Proposisjon 1.27?

26. Teorem 1.23 viser ikke hvordan man finner to uavhengige løsninger. Det finnes derimot en metode vi kan bruke for å finne en ny løsning når en løsning er kjent

(a) Vis at $y_1(t) = t^2$ er en løsing av

$$t^2y'' + ty' - 4y = 0. \tag{1}$$

(b) La $y_2(t) = vy_1(t) = vt^2$, hvor v er en (ikke ennå bestemt) funksjon av t. Merk at hvis $y_2/y_1 = v$ og v er ikke konstant, så er y_1 og y_2 uavhengige. Vis at substitusjonen $y_2 = vt^2$ reduserer Ligning (1) til den separable ligningen

$$5v' + tv'' = 0. \tag{2}$$

Løs Ligning (2) for v, med å bruke $y_2 = vt^2$, og deretter gi den generelle løsningen for Ligning (1).

Eksamen kont 2006

Oppgave 1 Bestem alle komplekse tall $z = a + ib$ som oppfyller ligningen

$$z^2 = i|z|^2$$