Obligatoriske oppgaver

Polking, avsnitt 4.3

5. Følgende ligning har distinkte, reelle røtter. Finn den generelle løsningen.

$$2y'' - y' - y = 0.$$

13. Følgende ligning har komplekse røtter. Finn den generelle løsningen.

$$y'' + 2y = 0.$$

18. Følgende ligning har repeterende, reelle røtter. Finn den generelle løsningen.

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

28. Finn løsningen til ligningen gitt initialbetingelsene.

$$y'' + 25y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Polking, avsnitt 4.4

2. (i) Bruk en kalkulator eller datamaskin til å tegne grafen til den gitte funksjonen, og (ii) gjør om ligningen til formen $y = A\cos(\omega t - \phi)$ og sammenlign grafen med grafen du fant i (i).

$$y = \cos t - \sin t.$$

Polking, avsnitt 4.5

4. Bruk metoden demonstrert i Example 5.6 og finn en partikulær løsning for differensialligningen.

$$y'' + 3y' - 18y = 18e^{2t}.$$

13. Bruk den komplekse metoden, som i Example 5.12, for å finne en partikulær løsning for differensialligningen.

$$y'' + 7y' + 10y = -4\sin 3t.$$

23. Bruk metodene fra avsnitt 4.3 for å finne en tilhørende homogen løsning; deretter bruk metodene fra avsnitt 4.5 for å finne den partikulære løsningen. Bruk Theorem 5.2 og finn den generelle løsningen. Tilslutt, finn løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsene.

$$y'' - 2y' + y = t^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

30. Anta at $y_f(t)$ er en løsning av

$$y'' + py' + qy = f(t)$$

og $y_g(t)$ en løsning av

$$y'' + py' + qy = g(t),$$

vis at $z(t) = \alpha y_f(t) + \beta y_g(t)$ er en løsning av

$$y'' + py' + qy = \alpha f(t) + \beta g(t),$$

hvor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

31. Bruk metodene vist i Example 5.23 og 5.26, samt oppgave **4.5.30**, for å finne en partikulær løsning av differensialligningen,

$$y'' + 2y' + 2y = 2 + \cos 2t.$$

Eksamen vår 2007

Oppgave 2

(a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

(b) Finn en generell løsning av differensialligningen

$$y'' + 2y' + y = x + 2e^{-x}.$$

Valgfrie oppgaver

Polking, avsnitt 4.3

37. Anta at λ_1 og λ_2 er røtter av den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, hvor $p, q \in \mathbb{R}$.

(a) Vis at $\lambda_1 \lambda_2 = q$.

(a) Vis at $\lambda_1 + \lambda_2 = -p$.

Polking, avsnitt 4.4

11. En $0,2kg$ masse er festet til en fjær med fjærkonstant $5kg/s^2$. Systemet er forskjøvet $0,5m$ fra likestilling og er blitt frigjort fra hvile. Anta at det er ingen demping tilstede, finn amplituden, frekvens, og fasen av den resulterende bevegelsen. Plott løsningen.

24. En $10kg$ masse strekker en fjær $1m$. Systemet er plassert i en veske som gir en dempningskonstant $\mu = 20kg/s$. Systemet starter fra hvile. En kraft gir massen en fart på $1,2m/s$ nedover. Finn amplituden, frekvensen, og fasen av den resulterende bevegelsen. Plott løsningen.

Polking, avsnitt 4.5

9. Anta at $z(t) = x(t) + iy(t)$ er en løsning av

$$z'' + pz' + qz = Ae^{i\omega t}. \tag{1}$$

Sett inn $z(t)$ i Ligning 1. Sammenlign de reelle og de imaginære delene av resultatet og bruk dette for å vise at

$$x'' + px' + qx = A\cos\omega t,$$
$$y'' + py' + qy = A\sin\omega t.$$

Skriv en kort avsnitt som oppsummerer dette resultatet.

41. Bruk $y_p(t) = (at+b)e^{-4t}$, eller noe lignende, i et forsøk på å finne en partikulær løsning for ligningen

$$y'' + 2y' + y = t^2e^{-2t}.$$

45. Anta at $z(t) = x(t) + iy(t)$ er en løsning av

$$z'' + pz' + qz = Ae^{(a+bi)t},$$

vis at $x(t)$ og $y(t)$ er løsninger av

$$x'' + px' + qx = Ae^{at}\cos bt$$

og

$$y'' + py' + qy = Ae^{at}\sin bt,$$

henholdsvis.

Eksamen kont 2000

Oppgave 2 Finn den generelle løsningen av følgende differensialligninger

(a) $y'' + ay = x$, for $a = \pm 1$.

(b) $y'' + 2y' + y = e^{bx}$, for forskjellige verdier av $b \in \mathbb{R}$.