TMA4115 Matematikk 3
Vår 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 4

Obligatoriske oppgaver

Polking, avsnitt 4.6

4. Finn en partikulærløsning til den følgende andre ordens differensial ligning.

$$x'' - 2x' - 3x = 4e^{3t}.$$

7. Finn en partikulærløsning til den følgende andre ordens differensial ligning.

$$x'' + x = \tan^2 t.$$

Polking, avsnitt 4.7

1. I læreboken (side xcvi), Case 1, så ble substitusjonen $x_p = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ bruk for å produsere

$$x_p = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t$$

som en partikulærløsning av $x'' + \omega_0^2 x = A\cos\omega t$, når $\omega \neq \omega_0$.

(a) Bruk substitusjonen $x_p = a\cos\omega t$ til å produsere det samme resultatet.

(b) Bruk substitusjonen $x_p = ae^{i\omega t}$ til å produsere det samme resultatet.

Lay, avsnitt 1.1

2. Løs ligningssystemet med å bruke elementære radoperasjoner på ligningene eller den tilhørende matrisen.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= -4 \\ 5x_1 + 7x_2 &= 11 \end{aligned}$$

7. Matrisen under, som tilhører et ligningssystem, har blitt redusert ved bruk av radoperasjoner. Fortsett radoperasjonene og beskriv løsnings mengden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

23. De førlgende utsagnene er tatt fra boken og er enten sitert direkte, endret litt (mer er fortsatt sann), eller endret slik at det ikke lengre er sann. Merker hvert utsagn med *Sant* eller *Usant*, begrunn svaret.

(a) Enhver elementær radoperasjon er reversibel.

(b) En 5×6 matrise har seks rader.

(c) Løsnings mengden til et lineært system med variablene $x_1, \ldots, x_n$ er en liste med tall $(s_1, \ldots, s_n)$ som gjør enhver ligning i systemet sann når verdiene $x_1, \ldots, x_n$ er byttet ut med $s_1, \ldots, s_n$, henholdsvis.

(d) To grunnleggende spørsmål om et lineært system innebærer eksistens og entydighet.

27. Anta at systemet under er konsistent for alle mulige verdier av f og g. Hva kan du si om koeffisientene c og d. Begrunn svaret ditt.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= f \\ cx_1 + dx_2 &= g \end{aligned}$$

Eksamen høst 2003

Oppgave 3

(a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 3y' + 2y = 2 + 6e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

(b) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$y'' - y = e^{-x}.$$

(c) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\cos^2 x}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Eksamen vår 2004

Oppgave 3

(b) Differensialligningen

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad -1 < x < 1 \tag{1}$$

har to løsninger av formen $y_1 = x + a$ og $y_2 = x^2 + b$ der a og b er konstanter. Bestem a og b ved innsetting. Begrunn at løsningene y_1 og y_2 er lineært uavhengige, og angi den generelle løsningen av Ligning 1.

Valgfrie oppgaver

Polking, avsnitt 4.5

45. Anta at $z(t) = x(t) + iy(t)$ er en løsning av

$$z'' + pz' + qz = Ae^{(a+bi)t},$$

vis at $x(t)$ og $y(t)$ er løsninger av

$$x'' + px' + qx = Ae^{at}\cos bt$$

og

$$y'' + py' + qy = Ae^{at}\sin bt,$$

henholdsvis.

46. Bruk metoden vist i **4.5.45.** for å finne en partikulær løsning til

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-2t}\sin t.$$

Polking, avsnitt 4.6

14. Verifiser at $y_1(t) = t^{-1}$ og $y_2(t) = t^{-1}\ln t$ er løsninger av den homogene ligningen

$$t^2y''(t) + 3ty'(t) + y(t) = 0.$$

Bruk variasjon av parametere (variation of parameters) til å finne den generelle løsningen til

$$t^2y''(t) + 3ty'(t) + y(t) = \frac{1}{t}.$$

Polking, avsnitt 4.7

10. En udempet fjær-masse system med ytre drivkraft er modellert som

$$x'' + 25x = 4\cos 5t.$$

Parameterne av denne ligningen er "endret" slik at frekvensen av den ytre drivkraften er lik den naturlige frekvensen av systemet. Anta at massen er forskjøvet en positiv enhet og sluppet fra hvile.

(a) Finn posisjonen til massen som en funksjon av tid. Hvilken del av løsningen garanterer at denne løsningen resonerer, i stede for den "bankende" oppførselen.

(b) Tegn løsningen du fant i **(a)**.

18. Finn en partikulærløsning til differensialligningen ved å bruke ubestemte koeffisient-metoden, som vist i Example 5.8 eller 5.12. Finn og plott løsningen av initialbetingelse-problemet. Sammenlign plottene til "transient response" og "steady state solution", bruk forskjellige farger på kurvene.

$$x'' + 2x' + 2x = \cos 2t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2.$$

Lay, avsnitt 1.1

19. Bestem verdien(e) av h slik at matrisen under tilhører et konsistent ligningsystem.

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

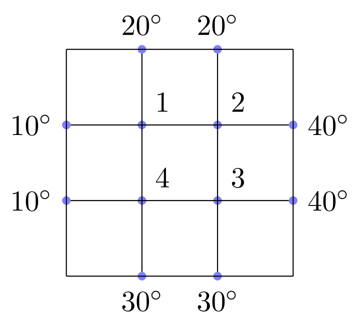
28. Anta a, b, c og d er konstanter slik at a er ikkenull og at systemet under er konsistent for alle mulige verdier av f og g. Hva kan du si om tallene a, b, c og d. Begrunn svaret ditt.

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= f \\ cx_1 + dx_2 &= g \end{aligned}$$

33. Et viktig problem i studiet av varmeoverføring er å bestemme likevekt temperaturen i en tynn plate når temperaturen rundt grensen er kjent. Anta at platen vist i Figur 1 representerer et tverrsnitt av en metallbjelke, som har neglisjerbar varmestrøm i retning vinkelrett på platen. La $T_1, \dots, T_4$ betegne temperaturen ved de fire indre nodene i figuren. Temperaturen ved en node er tilnærmet lik gjennomsnittet av de fire nærmeste nodene – til venstre, over, til høyre, og under. For eksempel,

$$T_1 = (10 + 20 + T_2 + T_4)/4, \qquad \text{eller} \qquad 4T_1 - T_2 - T_4 = 30.$$

Lag systemet med fire ligninger, hvor løsningen vil gi et estimat for temperaturene $T_1, \dots, T_4$.



Figur 1: Tverrsnitt av en metallbjelke

34. Løs ligningssystemet fra **1.1.33.**. [*Hint:* Start med å bytte om på rad 1 og 4 .]