Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 5

Obligatoriske oppgaver

Lay, avsnitt 1.2

4. Reduser matrisen til redusert trappeform (echelonform). Marker pivot posisjonene i den første og siste matrisen, og oppgi pivot kolonnene.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Beskriv all mulige trappeformer (echelonformer) av en ikkenull 2×2 matrise. Bruk symbolene $\blacksquare$, $*$, og 0, slik som i første del av Example 1.

12. Finn den generelle løsningen til systemet som matrisen tilhører.

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

19. Velg h og k slik at systemet har **(a)** ingen løsninger, **(b)** en unik løsning, og **(c)** mange løsninger.

$$\begin{aligned} x_1 + hx_2 &= 2 \\ 4x_1 + 8x_2 &= k \end{aligned}$$

22. Marker hvert utsagn med *Sant* eller *Usant*. Begrunn svaret.

(a) Trappeformen (echelonformen) til en matrise er unik.

(b) Pivot posisjonene i en matrise er avhengig av om rad utvekslinger er blitt bruk eller ikke i rad reduksjonsprosessen.

(c) Å redusere en matrise til trappeform (echelonform) kalles *forward phase* i rad reduksjonsprosessen.

(d) Når et system har frie variabler, inneholder løsningsrommet mange løsninger.

(e) En generell løsning av et system er en eksplisitt beskrivelse av alle løsningene til systemet.

Lay, avsnitt 1.3

3. Framstill de følgende vektorene som piler i xy-planet: $\mathbf{u}, \mathbf{v}, -\mathbf{v}, -2\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}$, og $\mathbf{u}-2\mathbf{v}$ Merk at $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ er en node av parallellogrammet med resterende noder $\mathbf{u}, \mathbf{0}$, og $-\mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

11. Finn ut om $\mathbf{b}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, og $\mathbf{a}_3$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

17. La $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$, og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}$. For hvilke verdi(er) av h er $\mathbf{b}$ i planet utspent av $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$?

Lay, avsnitt 1.4

3. Regn ut produktet ved å bruke **(a)** definisjonen, som i Example 1, og **(b)** rad-vektor regelen for å finne $A\mathbf{x}$. Hvis produktet ikke er definer, forklar hvorfor.

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -4 & -3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

9. Skriv systemet først som en vektorligning og så som en matriseligning

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= 9 \\ x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

14. La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Ligger $\mathbf{u}$ i underrommet av $\mathbb{R}^3$ utspent av kolonnene til A? Begrunn svaret.

21. La $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Vil $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ utspenne $\mathbb{R}^4$? Begrunn svaret.

22. La $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$. Vil $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ utspenne $\mathbb{R}^3$? Begrunn svaret.

Lay, avsnitt 1.5

3. Finn ut om systemet har en ikketriviell løsning. Prøv å bruk så få radoperasjoner som mulig.

$$\begin{aligned} -3x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 0 \\ -6x_1 + 7x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

5. Bruk samme metoden som i Example 1 og 2 til å skrive løsningsrommet til det gitte homogene systemet i parametrisk vektorform.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

15. Følg metoden til Example 3 for å beskrive løsningen av systemet i parametrisk vektorform. I tillegg, gi en geometrisk beskrivelse av løsningsrommet og sammenlign den med det du fant i **1.5.5.**

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= -1 \\ -3x_2 - 6x_3 &= -3 \end{aligned}$$

19. Finn den parametriske ligningen til linjen som går gjennom **a** parallell til **b**.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Eksamen kont 2004

Oppgave 7.

(a) Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 3x + 7y + 2z &= 2 \\ 2x + 3y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

(b) For hvilke verdier av parametrene a og b har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 3x + 7y + 2z &= b \\ 2x + 3y - az &= 0 \end{aligned}$$

- **(i)** Nøyaktig én løsning
- **(ii)** Nøyaktig to løsninger
- **(iii)** Uendelig mange løsninger
- **(iv)** Ingen løsninger

Valgfrie oppgaver

Lay, avsnitt 1.4

34. Anta A er en 3×3 matrise og $\mathbf{b}$ er en vektor i $\mathbb{R}^3$ med egenskapen at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en unik løsning. Forklar hvorfor kolonnene i A utspenner $\mathbb{R}^3$.

35. La A være en 3×4 matrise, la $\mathbf{y}_1$ og $\mathbf{y}_2$ være vektorer i $\mathbb{R}^3$, og la $\mathbf{w} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$. Anta $\mathbf{y}_1 = A\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}_2$ for noen vektorer $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ i $\mathbb{R}^4$. Hvilke fakta (*Merk:* $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ er vektorer, ikke skalar elementer i vektorer).

Lay, avsnitt 1.5

28. Hvis $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, kan løsningsrommet til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ være et plan gjennom origo? Begrunn svaret.

33. Gitt $A = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 7 & 21 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}$, finn en ikketriviell løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ved inspeksjon. [*Hint:* Tenk på ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ skrevet som en vektorligning.]

38. Anta A er en 3×3 matrise og $\mathbf{y}$ er en vektor i $\mathbb{R}^3$ slik at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ *ikke* har en løsning. Finnes det en vektor $\mathbf{z}$ i $\mathbb{R}^3$ slik at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{z}$ har en unik løsning? Forklar.