Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 6

Obligatoriske oppgaver

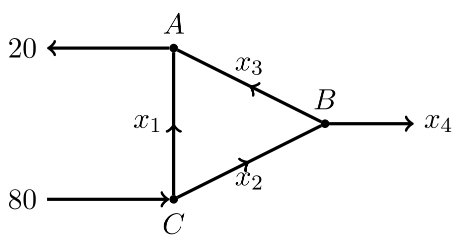
Lay, avsnitt 1.6

5. Bor-sulfid reagerer voldsomt med vann for å danne borsyre og hydrogensulfidgass. Den ubalansert ligningen er

$$B_2S_3 + H_2O \to H_3BO_3 + H_2S$$

For hver kjemisk forbindelse, konstruer en vektor som viser antall atomer av bor, svovel, hydrogen og oksygen.

11. Finn det generelle strømningsmønsteret av nettverket vist i Figur 1. Gitt at strømmen er alle ikkenegative, hva er den største mulige verdien av x_3? (OBS: Merk at figuren er forskjellig fra boken.)



Figur 1: Oppgave **1.6.11**

Lay, avsnitt 1.7

1. Avgjør om vektorene er lineært uavhengige. Begrunn svaret.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

3. Avgjør om vektorene er lineært uavhengige. Begrunn svaret.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

9. **(a)** For hvilke verdier av h er $\mathbf{v}_3$ i Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, og **(b)** for hvilke verdier av h er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ lineært avhengig? Begrunn begge svarene.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ h \end{bmatrix}$$

15. Avgjør ved inspeksjon om vektorene er lineært uavhengige. Begrunn svaret.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

20. Avgjør ved inspeksjon om vektorene er lineært uavhengige. Begrunn svaret.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

22. Marker hvert utsagn med *Sant* eller *Usant*. Begrunn hvert svar.

(a) To vektorer er lineært avhengige hvis og bare hvis de ligger på en linje gjennom origo.

(b) Hvis en mengde inneholder færre vektorer enn det er koordinater i vektorene, så er mengden lineært uavhengig.

(c) Hvis $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er lineært uavhengige, og hvis $\mathbf{z}$ er i Span$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, så er $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ lineært avhengig.

(d) Hvis en mengde i $\mathbb{R}^n$ er lineært avhengig, så inneholder mengden fler vektorer enn det er koordinater i hver vektor.

23. Beskriv de mulige trappeformene av matrisen. A er en 3×3 matrise med lineært uavhengige kolonner. Bruk symbolene $\blacksquare$ for en vilkårlig ikkenull verdi, $*$ for en vilkårlig verdi, og 0, slik som i første del av Example 1 i avsnitt 1.2.

Lay, avsnitt 1.8

13. Bruk et rektangulært koordinatsystem for å tegne $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, og deres bilde fra lineærtransformasjonen T. Beskriv geometrisk hva T gjør på hver vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^2$.

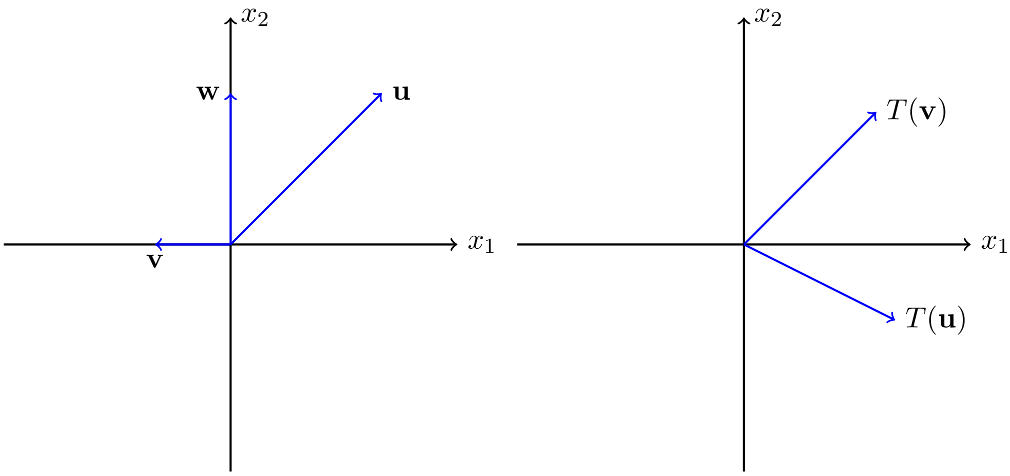
$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

16. Bruk et rektangulært koordinatsystem for å tegne $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, og deres bilde fra lineærtransformasjonen T. Beskriv geometrisk hva T gjør på hver vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^2$.

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

17. La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være en lineærtransformasjon som sender $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ til $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ til $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Bruk at T er lineær for å finne bildene av T anvendt på $3\mathbf{u}$, $2\mathbf{v}$, og $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$.

18. I Figur 2 er vektorene $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, og $\mathbf{w}$ vist sammen med bildene av $T(\mathbf{u})$ og $T(\mathbf{v})$, hvor $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er en lineærtransformasjon. Kopier dette bilde of tegn bilde av $T(\mathbf{w})$ så nøyaktig som du klarer. (*Hint:* Skriv $\mathbf{w}$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.)



Figur 2: Oppgave **1.8.18**

33. Vis at transformasjonen T, definert som $T(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, x_1 + 4, 5x_2)$, er ikke lineær.

Eksamen kont 2005

Oppgave 6 La A være en $m \times n$ matrise med $m > n$. Gjør rede for at det fins en vektor $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ slik at ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *ikke* har løsning.

Eksamen høst 2007

Oppgave 5 Anta at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^n$. Er vektorene

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

lineært avhengige eller lineært uavhengige? (Husk at svaret skal begrunnes.)

Valgfrie oppgaver

Lay, avsnitt 1.7

27. Hvor mange pivot kolonner må en 7×5 matrise ha for at dens kolonner er lineært uavhengige? Hvorfor?

37. Utsagnet under er enten sant (for alle tilfeller) eller usant (for minst et eksempel). Hvis det er usant, konstruer et eksempel for å vise at utsagnet ikke er alltid sant. Dette kalles et moteksempel. Hvis utsagnet er sant, gi en begrunnelse. (Det holder ikke å bare gi et eksempel som viser at det er sant, det trenger litt mer arbeid enn som så.)

Hvis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^4$ og $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært avhengige, da er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ også lineært avhengig.

38. Utsagnet under er enten sant (for alle tilfeller) eller usant (for minst et eksempel). Hvis det er usant, konstruer et eksempel for å vise at utsagnet ikke er alltid sant. Dette kalles et moteksempel. Hvis utsagnet er sant, gi en begrunnelse. (Det holder ikke å bare gi et eksempel som viser at det er sant, det trenger litt mer arbeid enn som så.)

Hvis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ er lineært avhengige vektorer i $\mathbb{R}^4$, så er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ også lineært avhengige. (*Hint:* se på $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + 0 \cdot \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$.)

39. Anta A er en $m \times n$ matrise med egenskapen at for alle $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ har ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ på det meste én løsning. Bruk definisjonen av lineært uavhengighet for å forklare hvorfor kolonnene i A må være lineært uavhengige.

Lay, avsnitt 1.8

25. Gitt $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ og $\mathbf{p}$ i $\mathbb{R}^n$, linjen gjennom $\mathbf{p}$ i retning av $\mathbf{v}$ har den parametriske ligningen $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$. Vis at en lineærtransformasjon $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sender denne linjen til en ny linje eller til et punkt (en degenerert linje).

26. La $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^3$, og la P være planet gjennom $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, og $\mathbf{0}$. Den parametriske ligningen av P er $\mathbf{x} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ (hvor $s, t \in \mathbb{R}$). Vis at en lineærtransformasjon $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sender P på et plan gjennom $\mathbf{0}$, eller en linje gjennom $\mathbf{0}$, eller til origo i $\mathbf{R}^3$. Hva må være tilfellet om $T(\mathbf{u})$ og $T(\mathbf{v})$ for at bilde av planet P skal være et plan?

29. Definer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som $f(x) = mx + b$.

(a) Vis at f er en lineærtransformasjon når $b = 0$

(b) Finn en egenskap ved lineærtransformasjoner som er brutt når $b \neq 0$.

(c) Hvorfor kalles f en lineær funksjon?

30. En *affin transformasjon* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ har formen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, hvor A er en $m \times n$ matrise og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Vis at T *ikke* er en lineærtransformasjon når $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

31. La $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineærtransformasjon of la $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ være et lineært avhengig mengde i $\mathbb{R}^n$. Forklar hvorfor mengden $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_3)\}$ er lineært avhengig.

Eksamen kont 2006

Oppgave 3 Gitt ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2ax_1 + ax_2 + 3x_3 &= 4a \\ x_1 + (a-1)x_3 &= a \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1. \end{aligned}$$

(a) Bestem, for hver verdi av parameteren a, antall løsninger av ligningssystemet.

(b) Løs ligningssystemet når $a = 3$.