Obligatoriske oppgaver

Lay, avsnitt 1.9

I oppgave **1.**, **5.**, og **8.**, anta at T er en lineærtransformasjon. Finn standardmatrisen for T.

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T(\mathbf{e}_1) = (3, 1, 3, 1)$ og $T(\mathbf{e}_2) = (-5, 2, 0, 0)$, hvor $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ og $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

5. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er en vertikal forskyvning transformasjon (vertical shear transformation) som sender $\mathbf{e}_1$ på $\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ men lar vektoren $\mathbf{e}_2$ forbli uforandret.

8. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ reflekterer først punktene gjennom den horisontale x_1 aksen og så gjennom linjen $x_2 = x_1$.

12. Vis at transformasjonen i oppgave **8.** er bare en rotasjon om origo. Hva er vinkelen av rotasjonen?

15. Fyll inn de manglende elementene i matrisen, anta at ligningen holder for alle verdier av variablene.

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_3 \\ 4x_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

I oppgave **29.** og **30.**, beskriv de mulige trappeformene av standardmatrisen for lineærtransformasjonen T. Bruk symbolene $\blacksquare$ for en vilkårlig ikkenull verdi, $*$ for en vilkårlig verdi, og 0, slik som i første del av Example 1 i avsnitt 1.2.

29. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ er en-til-en.

30. $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ er på.

31. La $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineærtransformasjon, med A som dens standardmatrise. Fullfør det følgende utsagnet for å gjøre det sant: *"T er en-til-en hvis og bare hvis A har _ pivot kolonner."* Forklar hvorfor utsagnet er sant. (*Hint:* Se på øvingene fra avsnitt 1.7.)

32. La $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineærtransformasjon, med A som dens standardmatrise. Fullfør det følgende utsagnet for å gjøre det sant: *"T er på hvis og bare hvis A har _ pivot kolonner."* Finn et teorem som forklarer hvorfor utsagnet er sant.

35. Hvis en lineærtransformasjon $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sender $\mathbb{R}^n$ på $\mathbb{R}^m$, kan du gi en relasjon mellom m og n? Hvis T er en-til-en, hva kan du si om m og n?

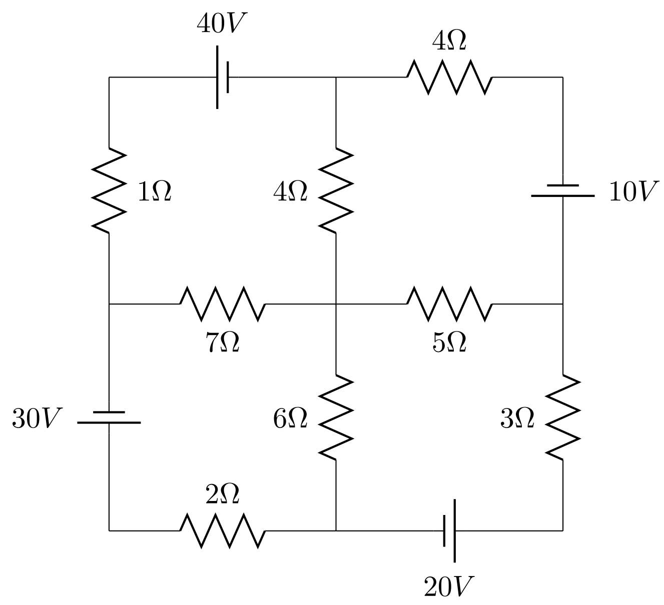
Lay, avsnitt 1.10

4a. *Cambridge Diet* gir $0.8g$ av kalsium per dag, i tillegg til næringen gitt i Tabell 1. Mengden av kalsium per enhet ($100g$) gitt fra de tre ingrediensene i *Cambridge Diet* er som følger: $1.26g$ fra fettfri melk, $0.19g$ fra soyamel, og $0.8g$ fra myse. En annen ingrediens i dietten er isolert soyaprotein, som gir følgende næring per enhet: $80g$ av protein, $0g$ av karbohydrater, $3.4g$ av fett, and $0.18g$ av kalsium.
Lag en matriseligning med løsning som bestemmer mengden av fettfri melk, soyamel, myse, og isolert soyaprotein nødvendig for å forsyne den eksakte mengden av protein, karbohydrat, fett, og kalsium i *Cambridge Diet.* Oppgi hva variablene i ligningen representerer.

	Mengde (g) tilført per $100g$ ingredienser			Mengde (g) tilført av
	Fettfri melk	Soyamel	Myse	*Cambridge Diet* per dag
Protein	36	51	13	33
Karbohydrat	52	34	74	45
Fett	0	7	1.1	3

Tabell 1: Oppgave **4a.**

7. Finn matriseligningen som bestemmer sløyfestrømmen.



Figur 1: Oppgave **7.**

11a. I 2012 var populasjonen av California $38,041,430$, og populasjonen i USA minus California var $275,872,610$. I løpet av året, ble det estimer at $748,252$ personer flyttet fra

California til andre steder i USA, mens $493,641$ personer flyttet til California fra andre steder i USA.
Sett opp en migrasjon matrise for denne situasjonen, bruk fem desimaler for migrasjonratene in og ut av California. La arbeidet ditt vise hvordan du produserte matrisen.

Lay, avsnitt 2.1

1. Finn hver av de følgende matrise sum eller produkt, hvis det er definert. Hvis et uttrykke er udefinert forklart hvorfor. Finn $-2A$, $B-2A$, AC, og CD, hvor

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

10. La $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$, og $C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Verifiser at $AB = AC$ og at $B \neq C$.

11. La $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Finn AD og DA. Forklar hvordan kolonnene eller radene av A endrer seg når A er multiplisert med D på høyreside eller på venstreside. Finn en 3×3 matrise B, ikke lik identitets matrisen eller nullmatrisen, slik at $AB = BA$.

Lay, avsnitt 2.2

25. Bevis det følgende for $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Vis at hvis $ad - bc = 0$ så har ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mer enn en løsning. Hvorfor impliserer dette at A ikke er invertibel? (*Hint:* Først anta $a = b = 0$. Deretter, hvis a og b er begge ikkenull, anta $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$.)

31. Finn inversen av matrisen, hvis den finner. Bruk algoritmen $[A \mid I] \to [I \mid A^{-1}]$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Valgfrie oppgaver

Lay, avsnitt 1.9

36. La $S : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ og $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være lineærtransformasjoner. Vis at mappingen $\mathbf{x} \mapsto T(S(\mathbf{x}))$ er en lineærtransformasjon (fra $\mathbb{R}^p$ til $\mathbb{R}^m$). (*Hint:* Beregn $T(S(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}))$ for $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^p$ og skalarer c og d. Rettferdiggjør hver sted i beregningen og forklar hvorfor denne beregningen gir det ønskede resultatet.)

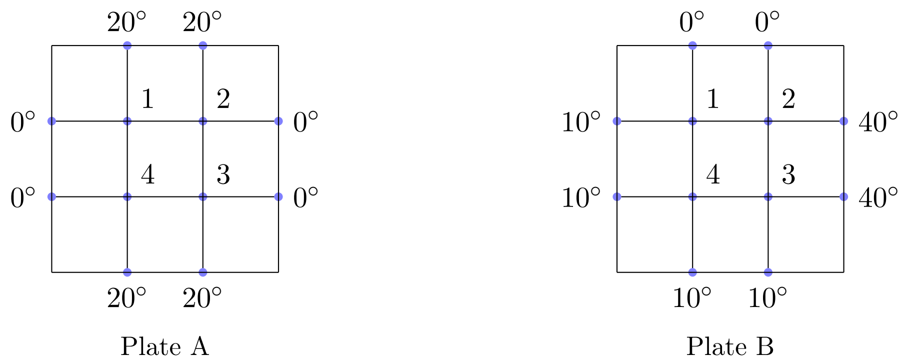
Lay, avsnitt 1.10

14. Studer hvordan endringene i grensetemperaturene på en stålplate påvirker temperaturene inne i platen.

(a) Beregn interntemperaturene T_1, T_2, T_3, T_4 i platene vist i Figur 2. Temperaturen T_k er gjennomsnittet av de fire nærmeste punktene, slik som i Øving 4 hvor temperaturene er $(20, 27.5, 30, 22.5)$. Hvordan er denne listen av verdier relatert til dine resultater for Plate A og Plate B?

(b) Uten å gjøre noen beregninger, gjett interntemperaturene i Plate A når grensetemperaturene er multiplisert med 3. Sjekk svaret ditt.

(c) Lag en generell formodning om sammenhengen mellom listen av de åtte grensetemperaturene og de fire interntemperaturene.



Figur 2: Oppgave **14.**

Lay, avsnitt 2.1

29. Gi et bevis for Theorem 2(b) og 2(c). Bruk rad-kolonne regelen (beskrevet i boken). Element (i, j) i $A(B + C)$ kan skrives som

$$a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + \cdots + a_{in}(b_{nj} + c_{nj}) \quad \text{or} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}).$$

Lay, avsnitt 2.2

24. Anta A er $n \times n$ og at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning for hver $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^n$. Forklar hvorfor A er invertibel. (*Hint:* Er A rad ekvivalent med I_n?)