Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 8

Obligatoriske oppgaver

Lay, avsnitt 2.3

Avgjør om matrisene i oppgave **2.** og **7.** er invertible. Bruk så få operasjoner som mulig. Begrunn svaret.

2. $\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

11. Matrisene i denne oppgaven er alle $n \times n$ matriser. Hver deloppgave har en *implikasjon* av formen *"Hvis* UTSAGN 1 *så* UTSAGN 2*."*. Marker en implikasjon som *Sant* hvis UTSAGN 2 er alltid sant hvis UTSAGN 1 er sant. En implikasjon er *Usant* hvis det finnes et eksempel der UTSAGN 2 er usann mens UTSAGN 1 er sann. Begrunn hvert svar.

a. Hvis ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun den trivielle løsningen, så er A radekvivalent med $n \times n$ identitetsmatrisen.

b. Hvis kolonnene av A spener $\mathbb{R}^n$, så er kolonnene lineært uavhengig.

c. Hvis A er en $n \times n$ matrise, så har ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ minst en løsning for alle $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^n$.

d. Hvis ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har en ikketriviell løsning, så har A færre en n pivot posisjoner.

e. Hvis A^T er ikke invertibel, så er A ikke invertibel.

15. Kan en matrise med to identiske kolonner være invertibel? Hvorfor eller hvorfor ikke?

Lay, avsnitt 2.5

I oppgave **1.** og **4.**, Løs ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ved å bruke LU faktorisering gitt for A. I oppgave **1**, løs $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ved å bruke ordinær radredusering også.

1.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

9. Finn en LU faktorisering av matrisen (hvor L er nedretriangulær med diagonal elementer lik 1).

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 10 \\ 9 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

Lay, avsnitt 3.1

2. Finn determinanten ved å utvide fra den første raden. Finn så determinanten ved å utvide fra den andre kolonnen.

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Finn determinanten i oppgave **9.** og **12.** ved å utvide fra en av radene. I hvert steg, velg en rad eller kolonne som gir minst mulig utregninger.

9. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & -8 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

22. Vi skal utforske effekten av en elementære radoperasjoner på determinanten av en matrise. I oppgaven har vi utført en radoperasjoen, oppgi radoperasjonen og beskriv hvordan den påvirker determinanten.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5+3k & 4+2k \end{bmatrix}$$

Lay, avsnitt 3.2

10. Finn determinanten ved radredusere matrisen til trappeform.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & -6 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 10 \\ 1 & 5 & -6 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

33. La A og B være kvadratiske matriser. Vis at selv om AB og BA ikke alltid er like, så er $\det AB$ og $\det BA$ alltid like.

39. La A og B være 3×3 matriser, med $\det A = -3$ og $\det B = 4$. Bruk egenskapene av determinant for å finne

a. $\det AB$

b. $\det 5A$

c. $\det B^T$

d. $\det A^{-1}$

e. $\det A^3$

40. La A og B være 4×4 matriser, med $\det A = -3$ og $\det B = -1$. Bruk egenskapene av determinant for å finne

a. $\det AB$

b. $\det B^5$

c. $\det 2A$

d. $\det A^T BA$

e. $\det B^{-1}AB$

Valgfrie oppgaver

Lay, avsnitt 2.3

13. En $m \times n$ **øvretriangulær matrise** er en matrise hvor elementene under diagonalen er lik 0. Når er en kvadratisk øvretriangulær matrise invertibel? Begrunn svaret.

Lay, avsnitt 2.5

24. (*QR faktorisering*) Anta $A = QR$, hvor Q og R er $n \times n$ matriser, R er invertibel og øvretriangulær, og Q har egenskapen $Q^T Q = I$. Vis at for hver $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^n$, så har ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en unik løsning. Hvilke utregninger med Q og R vil gi løsningen.

Lay, avsnitt 3.1

45. Er det sant at $\det(A + B) = \det A + \det B$? Utfør et par eksperimenter ved å lage fire par med kvadratiske $n \times n$ matriser (i forskjellige størrelser), og gi en formodning.

Lay, avsnitt 3.2

34. La A og P være kvadratiske matriser, med P invertibel. Vis at $\det(PAP^{-1}) = \det A$. Bruk et passende teorem i begrunnelsen.

35. La U være en kvadratisk matrise slik at $U^T U = I$. Vis at $\det U = \pm 1$. Bruk et passende teorem i begrunnelsen.