Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 9

Obligatoriske oppgaver

Lay, avsnitt 4.1

2. La W være unionen av første og tredje kvadrant i xy planet. Dvs, $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid xy \geq 0 \right\}$.

a. Hvis $\mathbf{u}$ er i W og c er en vilkårlig skalar, er da $c\mathbf{u}$ i W? Forklar.

b. Finn spesifikke vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i W slik at $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ ikke er i W. Dette er nok for å vise at W *ikke* er et vektorrom.

10. La H være mengden av alle vektorer på from $\begin{bmatrix} 2t \\ 0 \\ -t \end{bmatrix}$.Vis at H er et underrom av $\mathbb{R}^3$. (Finn en vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ slik at $H = \text{Span}\{\mathbf{v}\}$).

11. La W være mengden av alle vektorer på form $\begin{bmatrix} 5b+2c \\ b \\ c \end{bmatrix}$, hvor b og c er vilkårlige. Finn vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^3$ slik at $W = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Hvorfor viser dette at W er et underrom av $\mathbb{R}^3$?

Lay, avsnitt 4.2

3. Finn en eksplisitt beskrivelse av Nul$A$ ved å oppgi vektorene som spenner nullrommet.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

22. Finn en ikkenull vektor i Nul$A$ og en ikkenull vektor i Col$A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

24. La $A = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Avgjør om $\mathbf{w}$ er i Col$A$. Er $\mathbf{w}$ i Nul$A$?

Lay, avsnitt 4.3

I oppgave **3.** og **6.** avgjør hvilke av mengdene er en basis for $\mathbb{R}^3$. Av mengdene som *ikke* er en basis, avgjør hvilke som er lineært uavhengig og hvilke som spenner $\mathbb{R}^3$. Begrunn svarene dine.

3.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

11. Finn en basis for mengden av vektorer i $\mathbb{R}^3$ i planet $x + 2y + z = 0$. (*Hint:* Se på ligningen som et "system" av homogene ligninger).

14. Anta at A er radekvivalent til B. Finn en basis for Nul$A$ Col$A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 11 & -3 \\ 2 & 4 & -5 & 15 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -5 & 19 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eksamen vår 2004

Oppgave 4 *Svar uten begrunnelse ved å velge ett alternativ. Riktig svar: full score, galt svar: null score.*

a) La A og B være 2×2 matriser. Hvis determinanten til A er 2 og determinanten til B er 3, hva er determinanten til $C = -2A^{-1}B^T$?

A : 3 **B** : −3 **C** : 6 **D** : −6

b) For hvilke(n) c er vektorene $\mathbf{v}_1 = (1, 3, -3), \mathbf{v}_2 = (-2, 4, 1), \mathbf{v}_3 = (-1, 1, c)$ lineært uavhengige?

A : Ingen c **B** : $c = 1$ **C** : $c \neq 1$ **D** : Alle c

Eksamen kont 2007

Oppgave 4

a) En kvadratisk 3×3 matrise A er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

For hvilke reelle tall a er matrisen A invertibel?

b) Finn A^{-1} når $a = 1$.

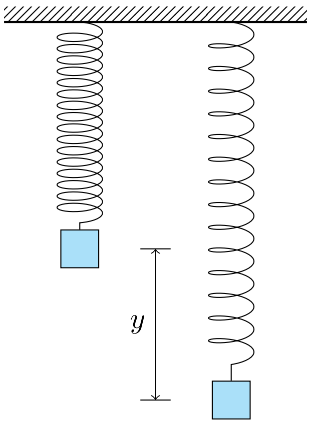
Valgfrie oppgaver

Lay, avsnitt 4.1

19. Hvis en masse m er plassert på enden av en fjær, og hvis massen er dratt nedover og sluppet, masse-fjær systemet vil da oscillere. Forskyvningen y av massen fra sin stille posisjon er gitt av en funksjon på formen

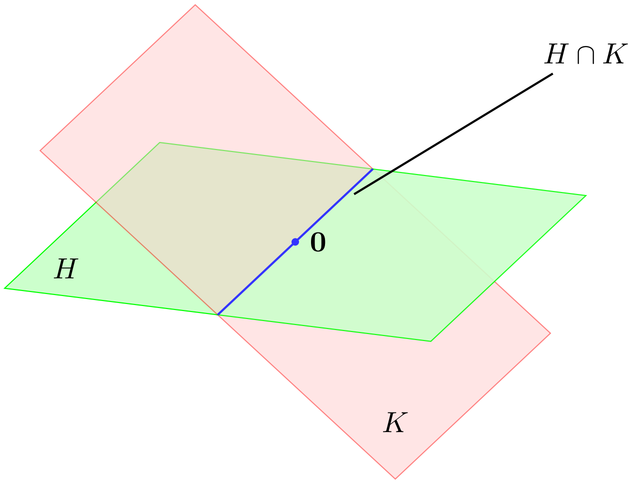
$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

hvor ω er en konstant som er avhengig av fjæren og massen. (Se Figur 1.) Vis at mengden av alle slike funksjoner (med konstant ω og vilkårlige c_1, c_2) er et vektorrom.



Figur 1: Oppgave **4.1.19.**

32. La H og K være underrom av et vektorrom V. **Snittet** av H og K, skrevet som $H \cap K$, er mengden av $\mathbf{v}$ i V som tilhører både H og K. Vis at $H \cap K$ er et underrom av V. (Se Figur 2). Gi et eksempel i $\mathbb{R}^2$ som viser at unionen av to underrom ikke er, generelt, et underrom.



Figur 2: Oppgave **4.1.32.**

Lay, avsnitt 4.2

27. Det kan vises at $x_1 = 3, x_2 = 2$, og $x_3 = -1$ er en løsning for systemet under. Bruk dette og litt teori for å forklare hvorfor $x_1 = 30, x_2 = 20$, og $x_3 = -10$ er en annen løsning for systemet. (Observer hvordan løsningene er relatert, men ikke utfør noen beregninger.)

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

30. La $T : V \to W$ være en lineærtransformasjon fra et vektorrom V til et vektorrom W. Bevis at bilde til T er et underrom av W. (*Hint*: Typiske elementer i bilde til T har form $T(\mathbf{x})$ og $T(\mathbf{y})$ for $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$)

Lay, avsnitt 4.3

23. Anta $\mathbb{R}^4 = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4\}$. Forklar hvorfor $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4\}$ er en basis for $\mathbb{R}^4$.

24. La $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ være en lineært uavhengig mengde i $\mathbb{R}^n$ Forklar hvorfor $\mathcal{B}$ må være en basis for $\mathbb{R}^n$.

27. La V være vektorrommet av alle funksjoner

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

som beskriver masse-fjær systemet fra oppgave **4.1.19.**. Finn en basis for V.