Obligatoriske oppgaver

Lay, avsnitt 4.4

3. Finn vektoren $\mathbf{x}$ som er beskrevet av koordinatvektoren $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ og basisen $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5. Finn koordinatvektoren $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ av $\mathbf{x}$ for den gitte basisen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1.\mathbf{b}_2\}$.

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

17. Vektorene $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$ spenner ut $\mathbb{R}^2$ men danner ikke en basis. Finn to forskjellige måter å uttrykke $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Lay, avsnitt 4.5

1. Finn en basis og dimensjonen til underrommet.

$$\left\{ \begin{bmatrix} s-2t \\ s+t \\ 3t \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

8. Finn en basis og dimensjonen til underrommet.

$$\{(a, b, c, d) \mid a - 3b + c = 0\}$$

15. Finn dimensjonen til Nul$A$ og Col$A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Lay, avsnitt 4.6

3. Anta at matrisen A er radekvivalent med B. Uten å gjøre noen beregninger, finn rank$A$ og $\dim \operatorname{Nul} A$. Deretter finn basene for Col$A$, Row$A$, og Nul$A$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -3 & -3 & -4 \\ 4 & -6 & 9 & 5 & 9 \\ -2 & 3 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11. Hvis nullrommet til en 8×5 matrise A er 2 dimensjonal, hva er dimensjonen for radrommet til A?

14. Hvis A er en 4×3 matrise, hva er den største mulige dimensjonen for radrommet til A? Hvis A er en 3×4 matrise, hva er den største mulige dimensjonen for radrommet til A? Forklar.

Lay, avsnitt 4.9

4. Været i Columbus er enten bra, likegyldig, eller dårlig på en gitt dag. Hvis været er bra i dag, så er det en 60% sjanse for at være blir bra i morgen, en 30% sjanse for at være blir likegyldig, og en 10% sjanse for at være blir dårlig. Hvis været er likegyldig i dag, vil det være bra i morgen med sannsynlighet 40% og likegyldig med sannsynlighet 30%. Tilslutt, hvis været er dårlig i dag, vil det være bra i morgen med sannsynlighet 40% og likegyldig med 50% sannsynlighet.

a. Hva er den stokastiske matrisen for denne situasjonen?

b. Anta det er en 50% sjanse for bra vær og en 50% sjanse for likegyldig vær i dag. Hva er sannsynligheten for at det blir dårlig vær i morgen?

c. Anta at det forutsette været på mandag er 40% sjanse for likegyldig og 60% sjanse for dårlig vær. Hva er sjansene for bra vær på onsdag?

14. Forsettesle av oppgave **4.9.4.** I det lange løp, hvor sannsynlig er det for at været er bra på en vilkårlig dag?

Eksamen vår 2009

Oppgave 5 La

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 \\ -3 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Løs ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Finn en basis for Nul$A$.

b) Finn en basis for Col$A$ og Row$A$. Er det mulig å finne en vektor $\mathbf{c}$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ *ikke* har løsning?

Valgfrie oppgaver

Lay, avsnitt 4.4

11. Bruk en invers matrise for å finne $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

24. Vis at koordinatmappingen er på $\mathbb{R}^n$. Det vil si, for vilkårlig $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, med elementer $y_1, \ldots, y_n$, finn $\mathbf{u}$ i V slik at $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{y}$.

Lay, avsnitt 4.5

11. Finn dimensjonen til underrommet utspent av de følgende vektorene.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

19. I denne oppgaven er V et vektorrom. Marker hver deloppgave med *Sant* og *Usant*. Begrunn svarene.

a. Antallet pivot kolonner i an matrise er lik dimensjonen til kolonnerommet.

b. Et plan i $\mathbb{R}^3$ er et to dimensjonalt underrom av $\mathbb{R}^3$.

c. Dimensjonen til vektorrommet $\mathbb{P}_4$ er 4.

d. Hvis $\dim V = n$ og S er en lineært uavhengig mengde i V, da er S en basis for V.

e. Hvis en mengde $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ spenner ut en endeligdimensjonal vektorrom V og hvis T er en mengde som inneholder fler enn p vektorer i V, da er T lineært avhengig.

Lay, avsnitt 4.6

19. Anta at løsningene av et homogent løsningsystem, med fem ligninger og seks ukjente, er alle multipler av en ikkenull løsning. Vil systemet ha en løsning for alle mulige konstanter på høyre side av ligningene? Forklar.

27. La A være en $m \times n$ matrise. Hvilke av underrommene Row$A$, Col$A$, Nul$A$, RowA^T, ColA^T, og NulA^T er i $\mathbb{R}^m$ og hvilke er i $\mathbb{R}^n$? Hvor mange distinkte underrom er det i denne listen?

Lay, avsnitt 4.9

18. Vis at alle 2×2 stokastiske matriser har minst en stabil vektor. Enhver slik matrise kan skrives som $P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix}$, hvor α og β er konstanter mellom 0 og 1. (Det finnes to lineært uavhengige stabile vektorer hvis $\alpha = \beta = 0$. Ellers er det bare en.)