Obligatoriske oppgaver

Lay, avsnitt 5.1

2. Er $\lambda = -2$ en eigenverdi av $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$? Begrunn svaret.

9. Finn en basis for eigenrommet for hvert av de oppgitte eigenverdiene.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 1, 5$$

15. Finn en basis for eigenrommet den oppgitte eigenverdien.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 3$$

25. La λ være en eigenverdi for en invertibel matrise A. Vis at λ^{-1} er en eigenverdi for A^{-1}. (*Hint*: Anta en ikkenull vektor $\mathbf{x}$ oppfyller $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.)

Lay, avsnitt 5.2

8. Finn det karakteristiske polynomet og eigenverdiene til matrisen.

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

27. La

$$A = \begin{bmatrix} .5 & .2 & .3 \\ .3 & .8 & .3 \\ .2 & 0 & .4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} .3 \\ .6 \\ .1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a. Vis at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er eigenvektorer av A. (*Hint:* A er den stokastiske matrisen som ble studert i Example 3, avsnitt 4.9.)

b. La $\mathbf{x}_0$ være en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^3$ med ikkenegative elementer som summeres til 1. (En slik vektor kalles en sannsynlighetsvektor.) Forklar hvorfor det finnes konstanter c_1, c_2, og c_3 slik at $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$. Finn $\mathbf{w}^T\mathbf{x}_0$, og konkluder med at $c_1 = 1$.

c. For $k = 1, 2, \ldots,$ definer $\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$, med $\mathbf{x}_0$ som i deloppgave **(b)**. Vis at $\mathbf{x}_k \to \mathbf{v}_1$ når k øker.

Lay, avsnitt 5.3

11. Diagonaliser matrisen. Eigenverdiene for matrisen er $\lambda = 1, 2, 3$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

14. Diagonaliser matrisen. Eigenverdiene for matrisen er $\lambda = 5, 4$.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

27. Vis at hvis A er både diagonaliserbar og invertibel, da er A^{-1} også det.

Lay, avsnitt 5.5

4. Matrisen er en kompleks matrise. Finn eigenverdiene og en basis for hvert eigenrom i $\mathbb{C}^2$.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

16. Finn en invertibel matrise P og en matrise C på formen $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ slik at matrien under har form $A = PCP^{-1}$. Bruk det du fant fra oppgave **5.5.4**.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

25. La A være en reel $n \times n$ matrise, og la $\mathbf{x}$ være en vektor i $\mathbb{C}^n$. Vis at $\mathrm{Re}(A\mathbf{x}) = A\,\mathrm{Re}(\mathbf{x})$ og $\mathrm{Im}(A\mathbf{x}) = A\,\mathrm{Im}(\mathbf{x})$.

Eksamen kont 2006

Oppgave 4 La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

a) Bestem alle egenverdier og egenvektorer til A.

b) Finn en matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$. Benytt dette til å beregne matrisen A^{2006}.

Valgfrie oppgaver

Lay, avsnitt 5.1

26. Vis at hvis A^2 er nullmatrisen så er 0 de eneste eigenverdiene til A.

27. Vis at λ er en eigenverdi for A hvis og bare hvis λ er en eigenverdi for A^T. (*Hint*: Finn ut hvordan $A - \lambda I$ og $A^T - \lambda I$ er relatert.)

29. Ta i betraktning en $n \times n$ matrise A med egenskapen at for alle radene vil radelementene summeres til den samme verdien s. Vis at s er en eigenverdi for A. (*Hint*: Finn en eigenvektor.)

Lay, avsnitt 5.2

23. Vis at hvis $A = QR$ med Q invertibel, da er A likedannet (similar) til $A_1 = RQ$.

24. Vis at hvis A og B er likedannet (similar), så vil $\det A = \det B$.

Lay, avsnitt 5.3

28. Vis at hvis A har n lineært uavhengige eigenvektorer, da har A^T også det (A er en $n \times n$ matrise). (*Hint*: Bruk diagonaliseringsteoremet.)

29. En faktoisering $A = PDP^{-1}$ er ikke unik. Demonstrer dette for matrisen A fra Example 2, hvor vi har at

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

For $D_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, bruk informasjonen over for å finne en matrise P_1 slik at $A = P_1 D_1 P_1^{-1}$.

Lay, avsnitt 5.5

23. La A være en $n \times n$ reel matrise med egenskapen $A^T = A$, la $\mathbf{x}$ være en vilkårlig vektor i $\mathbb{C}^n$, og la $q = \bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x}$. Likheten under viser at q er et reelt tall ved å verifisere at $\bar{q} = q$. Gi en forklaring for hvert steg.

$$\bar{q} = \overline{\bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x}} \stackrel{(a)}{=} \mathbf{x}^T \overline{A\mathbf{x}} \stackrel{(b)}{=} \mathbf{x}^T A\bar{\mathbf{x}} \stackrel{(c)}{=} (\mathbf{x}^T A\bar{\mathbf{x}})^T \stackrel{(d)}{=} \bar{\mathbf{x}}^T A^T \mathbf{x} \stackrel{(e)}{=} q$$

24. La A være en $n \times n$ reel matrise med egenskapen $A^T = A$. Vis at hvis $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ for en ikkenull vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{C}^n$, så er λ reel og den reelle delen av $\mathbf{x}$ er en eigenvektor av A. (*Hint:* Finn $\bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x}$, og bruk det du fant i oppgave **5.5.23**. Se også på den reelle og den imaginære delene av $A\mathbf{x}$.)