Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4115 Matematikk 3
Vår 2017

Øving 12

Obligatoriske øvinger

Polking, avsnitt 4.2

I oppgave **1.** og **2.**, bruk substitusjonen $v = y'$ for å skrive andreorden ligningene som et system av to førsteordens differensialligninger.

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$

2. $4y'' + 4y' + y = 0$

Lay, avsnitt 5.7

1. En partikkel som beveger seg i et kraftfelt har posisjonsvektor $\mathbf{x}$ som tilfredsstiller $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. A er en 2×2 matrise som har eigenverdiene 4 og 2, med korresponderende eigenvektorer $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Finn posisjonen av partikkelen som en funksjon av tid t, hvor $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Løs initialbetingelse problemet $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ for $t \geq 0$, hvor $\mathbf{x}(0) = (3, 2)$. Klassifiser origo som en attraktor, repeller, eller et sadelpunkt av det dynamiske systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Finn rettningen av den største attraktoren og/eller repeller. Hvis origo er et sadelpunkt, tegn nivåkurvene i faseplanet.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

9. Konstruer den generelle løsningen til $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ som inneholder komplekse eigenfunksjoner, deretter finn den generelle reelle løsningen. Beskriv eller tegn formen på nivåkurvene i faseplanet.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Lay, avsnitt 6.1

6. Finn

$$\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}\right)\mathbf{x}, \quad \text{hvor} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

I oppgave **9.** og **10.**, finn en enhetvektor med samme retning som den oppgitte vektoren.

9. $\begin{bmatrix} -30 \\ 40 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

Fastslå om vektorene i oppgave **15.** og **16.** er ortogonale eller ikke.

15. $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

16. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

26. La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$, og la W være mengden av alle $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^3$ slik at $\mathbf{u}\cdot\mathbf{x} = 0$. Hvilket teorem fra Kapittel 4 kan bli brukt for å vise at W er et underrom av $\mathbb{R}^3$? Beskriv W geometrisk.

Lay, avsnitt 6.2

7. Vis at $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^2$. Skriv $\mathbf{x}$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$.

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix}$$

11. Finn den ortogonale projeksjonen av $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ på linjen gjennom $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ og origo.

14. La $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$. Skriv $\mathbf{y}$ som en sum av vektorer i Span$\{\mathbf{u}\}$ og en vektor ortogonal til $\mathbf{u}$.

15. La $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$. Finn avstanden fra $\mathbf{y}$ til linjen gjennom $\mathbf{u}$ og origo.

Valgfrie oppgaver

Lay, section 6.1

29. La $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_p\}$. Vis at hvis $\mathbf{x}$ er ortogonal til hver $\mathbf{v}_j$, for $1 \leq j \leq p$, så er $\mathbf{x}$ ortogonal til enhver vektor i W.

Lay, section 6.2

26. Anta W er et underrom av $\mathbb{R}^n$ utspent av n ikkenull ortogonale vektorer. Forklar hvorfor $W = \mathbb{R}^n$.

27. La U være en kvadratisk matrise med ortogonale kolonner. Forklar hvorfor U er invertibel. (Oppgi teoremene du bruker).